关于图的控制数的几点注记

于 崇 智

(基础课部)

摘 要

一个图 $G = (V, E)$ 的控制数 $\gamma(G)$ 是 V 的这样一个子集 D 的最小基数, 使得 G 中每一个顶点或者在 D 中或者和 D 中的一些顶点邻接。本文给出 $\gamma(G)$ 的上界 $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$ 的二个新的简短证明; 得到 k -控制临界图的控制数的下界, 并讨论了图与补图间控制数的关系。

本文涉及的图 $G = (V, E)$ 是有限简单无向图。设 $v \in V$, 它的邻域定义为,

$$N(v) = \{u \in V : uv \in E\},$$

它的闭邻域定义为,

$$N[v] = N(v) \cup \{v\}.$$

设 D 是 V 的一个子集, 如果 $V - D$ 中的每一个顶点至少有一个 D 中的邻点, 则称 D 为 G 的一个控制集。任何一个 G 的控制集的最小基数称为 G 的控制数 (Domination number), 记为 $\gamma(G)$ 。对 G 中任何二个不邻接的顶点 u, v , 若

$$\gamma(G + uv) < \gamma(G) = k,$$

则称 G 为 k -控制临界图, 简称为 k -控临图。

用 $\Delta(G)$ 、 $\delta(G)$ 分别表示 G 中顶点的最大和最小度数, 用 $\alpha(G)$ 、 $\beta(G)$ 分别表示 G 的复盖数和独立数。这里没有定义的术语和符号, 见[1]。

一、 $\gamma(G)$ 的上界

张忠辅⁽²⁾已得到下列二个关于图的控制数的上界的定理。

定理 1⁽²⁾ $\forall G, \gamma(G) \leq \beta(G)$ 。

本文于1990年3月21日收到

其中 $\beta(G)$ 为 G 的独立数。

定理2⁽²⁾对连通图 G ,

$$\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$$

其中 $|V|$ 表示 G 的顶点个数, $\lceil x \rceil$ 表示 x 的最大整数部分。

[2]中定理2采用对顶点数的数学归纳法来证明, 这里我们给出二个更为直接而简短的证明。为此先证

引理3 $\forall G, \gamma(G) \leq \alpha(G)$ 。

其中 $\alpha(G)$ 为 G 的复盖数。

证明 G 的复盖是指 V 的一个子集 S , 使 G 的每条边至少有一个端点在 S 中。而 G 的最小复盖的顶点个数为 G 的复盖数。由复盖定义, 知任何一个复盖均为 G 的一个控制集, 由控制数定义, 立得。

定理2的证明1 $\forall G$, 由引理3

$$\gamma(G) \leq \alpha(G) \tag{1}$$

由定理1,

$$\gamma(G) \leq \beta(G) \tag{2}$$

故(1)+(2), 得

$$2\gamma(G) \leq \alpha(G) + \beta(G)$$

再由[1]第七章推论7.1, $\forall G$,

$$\alpha(G) + \beta(G) = |V|,$$

所以,

$$2\gamma(G) \leq |V|,$$

$$\therefore \gamma(G) \leq \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$$

定理2的证明2 用反证法。

假设连通图 G , 有

$$\gamma(G) > \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$$

则 G 中必不存在一个基数小于或等于 $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$ 的控制集。

设 S 是 G 的任意一个最小控制集, 由假设

$$|S| > \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$$

对任何 $v \in S$, 有

$$N(v) - N[S] \neq \phi.$$

这里 $N[S]$ 定义为

$$\bigcup_{x \in S} N[x]$$

若不然, 就与 S 的最小性矛盾。即 $\forall v \in S$, 至少存在一点 $u \in V - S$, 使

$$uv \in E.$$

故 $V - S$ 亦是 G 的一个控制集, 但因为

$$|S| > \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor,$$

必有

$$|V - S| < |V| - \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor,$$

不论 $|V|$ 为偶数还是奇数, 均成立

$$|V - S| \leq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor.$$

与假设矛盾, 故证。

当 $\Delta(G) > \frac{|V|}{2}$ 时, 可得比定理 2 更好的上界。

定理 4 $\forall G$, 有

$$\gamma(G) \leq |V| - \Delta(G).$$

证明 设 $u \in V$ 且 $d_G(u) = \Delta(G)$ 。则

$$V - N(u)$$

一定是 G 的一个控制集, 由控制数定义即得。

二、控临图 $\gamma(G)$ 的下界

关于控制数 $\gamma(G)$ 的下界, [2] 中已得到下列两个定理。

引理 5⁽²⁾ $\forall G$,

$$\gamma(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{1 + \Delta(G)} \right\rfloor.$$

引理 6⁽²⁾ 若 $\forall v \in V$, 有 $\gamma(G - v) \leq \gamma(G)$, 则

$$\gamma(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d(v)}.$$

从这个定理可推出

定理 7 若 G 为 k -控临图, 则

$$k = \gamma(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{1 + d(v)}.$$

证明 由 [3], 若 G 为 k -控临图, 则对任何 $v \in V$, 有

$$\gamma(G - v) \leq \gamma(G) = k.$$

再由引理 6 即证。

利用切比谢夫不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n (1+x_i) \right) \geq n^2,$$

其中 x_i 不小于0, 可得

推论8 若 G 为 k -控临图, 则

$$k = \gamma(G) \geq \frac{|V|^2}{|V| + 2|E|}.$$

证明 只要取 $x_i = d(v_i)$ 即证。

三、图与补图间控制数的关系

把 G 的补图记为 $\overline{G}$ 。[2]中张忠辅得到

引理9⁽²⁾ $\forall G$, 有

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq |V| + 1.$$

当 G 为全连通图, 即 $G, \overline{G}$ 均为连通图时, 有更强一点的结论。

定理10 若 G 全连通, 则

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq |V|.$$

证明 G 全连通, 按定义, G 和 $\overline{G}$ 均为连通图, 由定理2,

$$\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil.$$

又因为 $V(G) = V(\overline{G})$,

$$\gamma(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil.$$

两式相加, 得

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq 2 \cdot \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil \leq |V|.$$

对任何图 G , 补图的控制数 $\gamma(\overline{G})$ 亦有上界。

定理11 $\forall G$, 有

$$\gamma(\overline{G}) \leq 1 + \delta(G).$$

证明 设 $v \in V$, $d_G(v) = \delta(G)$, 则 $N[v]$ 必是 $\overline{G}$ 的一个控制集, 由控制数定义立证。

推论12 $\forall G$, 有

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq |V| - \Delta + \delta + 1.$$

其中 $\Delta(G)$, $\delta(G)$ 分别为 G 中顶点的最大和最小度数。

证明 由定理4及11, 立证。

当 $\Delta(G) > \delta(G)$, 即 G 为非正则图时, 推论12的结论比引理9更强。

推论13 对任何非平凡树 T , 有

$$\gamma(\overline{T}) = 2.$$

证明 因为任何非平凡树至少有 2 个度数为 1 的顶点, 故

$$\delta(T) = 1.$$

由定理 11, 知

$$\gamma(\overline{T}) \leq 1 + \delta(T) = 2.$$

又因 T 为非平凡树, 必连通且

$$|V(T)| \geq 2,$$

则

$$\gamma(\overline{T}) \neq 1.$$

故

$$\gamma(\overline{T}) = 2.$$

[3] 中证明 3-控临图直径至多为 3。对直径为 3 的 3-控临图的补图的控制数, 有定理 14 若 G 为直径为 3 的 3-控临图, 则

$$\gamma(\overline{G}) = 2.$$

证明 因直径

$$\text{diam}G = 3$$

故

$$E(G) \neq \phi.$$

所以 $\overline{G}$ 不是完全图, 故

$$\gamma(\overline{G}) \geq 2.$$

若设 $u, v \in V(G)$, $d_G(u, v) = 3$ 。由 [4], 知

$$V(G) - N[u] \cup N[v]$$

为完全图, 则 $\{u, v\}$ 控制 $\overline{G}$, 所以

$$\gamma(\overline{G}) \leq 2,$$

则

$$\gamma(\overline{G}) = 2.$$

参 考 文 献

- [1] J.A.邦迪 和 U.S.R. 默蒂·吴望名等译·图论及其应用, 北京: 科学出版社, 1984; 284
- [2] 张忠辅·关于图的支配数·兰州铁道学院学报, 1988; 7 (2—3): 37—45
- [3] D.P.Sumner and P.Blicht·Domination Critical Graphs·Journal of Combinatorial Theory Series B, 1983; 34; 65—76
- [4] 于崇智·控制临界图·华东交通大学学报, 1990; (1): 34—38

Some Notes on Domination Number in Graphs

Yu Chongzhi

ABSTRACT

The domination number $\gamma(G)$ of a graph $G = (V, E)$ is the minimum cardinality of a subset of V such that every vertex is either in the set or is adjacent to some vertices in the set. We give two new short proofs about the upper bound $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$ of domination number in graph, obtain the inner bound of domination number in k - γ critical graphs and discuss the relation of domination numbers between graph and its complement.