

一类非齐次退化方程的初值问题

唐璐茜

(基础部)

摘要

本文讨论非齐次退化方程

$$\begin{cases} L_p^k u \equiv u_{xx} - x^{2k} u_{tt} + p x^{k-1} u_t = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

(k 是正整数, p 是实数)

的初值问题, 并给出解析解的明确表达式

引言

关于齐次的退化方程

$$L_p^k u \equiv u_{xx} - x^{2k} u_{tt} + p x^{k-1} u_t = 0 \quad (1)$$

(k 是正整数, p 是实数)

人们已经发现了一些新的现象, 例如在 C^∞ 中讨论方程(1)的Cauchy问题有所谓离散现象⁽¹⁾⁽²⁾; 在解析函数类中讨论方程(1)的初值问题, 当 $p \neq 0$, $k=1$ 时, 只要给一个初值条件 $u(x, 0) = \phi(x)$ 就唯一确定了方程(1)的解析解⁽³⁾⁽⁴⁾, 但当 $p \neq 0$, $k>1$ 时, 要使只给一个初值条件的问题存在唯一的解析解, 则初值 $\phi(x)$ 的展开式必须是一个具有一定规律的缺项幂级数⁽⁵⁾。退化方程的这种特性及其产生的原因均引起人们的兴趣⁽⁶⁾⁽⁶⁾。

对于非齐次退化方程的初值问题

$$(A_1^k) \begin{cases} L_p^k u = f(x, t) & (k \text{ 是正整数, } p \text{ 是实数}) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (2)$$

(3)

其中 $f(x, t)$, $\phi(x)$ 是在原点附近解析的已知函数。问题 (A_1^k) 在 $k=1$, $p \neq 0$ 时在原点附近存在唯一的解析解已被证明。本文主要讨论当 $k>1$ 时的情形。

本文于1990年11月5日收到

我们发现问题 (A_t^k) 在 $k>1$ 的情形和 $k=1$ 的情形根本不同,和齐次方程 (A_0^k) 也不同,首先当 $k>1$ 时,要使初值问题 (A_t^k) 在原点附近存在解析解,初值 $\phi(x)$ 必须与非齐次项 $f(x,t)$ 满足一定的关系(我们将给出这种关系),所以 $\phi(x)$ 不能任意给,但也不要求 $\phi(x)$ 的展开式一定要缺项;其次,问题的解析解的展开式的系数,当 $k>1$ 时,有一部分完全由 $f(x,t)$ 决定,而与 $\phi(x)$ 无关,这就是说这部分系数完全由方程本身决定。

本文采用统一的方法,给出初值问题 (A_t^k) ,当 k 是正整数, p 是实数时,存在解析解的充要条件及解析解的明确表达式,从而完全解决了初值问题 (A_t^k) 。

一、记 号

这里引入下文中使用的一些记号:

$$A_l = \frac{-[1(k+1)+\alpha-2]!}{[(1-1)(k+1)+\alpha]!} P, \quad l=1, 2, 3, \dots, \quad \alpha=0, 1, 2, \dots, k_0 \quad (4)$$

$$B_l = \frac{[1(k+1)+\alpha-2]!}{[(1-2)(k+1)+\alpha]!} \quad l=2, 3, \dots, \quad \alpha=0, 1, 2, \dots, k_0 \quad (5)$$

$$G_0^n = 1 (n=0, 1, 2, \dots), \quad G_1^n = A_n (n=1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

$$G_l^n = A_{n+1-l} G_{l-1}^n + B_{n+2-l} G_{l-2}^n \quad (2 \leq l \leq n, n=2, 3, \dots) \quad (7)$$

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = -A_1 \quad (8)$$

$$\Delta_n = -A_n \Delta_{n-1} + B_n \Delta_{n-2} \quad (n=2, 3, \dots) \quad (9)$$

$(n)_m!$ 表示以 n 为最大的相差为 m 的自然数的连乘积,并约定:当 $n \leq 0$ 时, $(n)_m! = 1$ 。此外,我们还约定下列记号:

$$\sum_{i=\gamma}^{\beta} X_i = 0, \quad \text{当 } \gamma > \beta \text{ 时}, \quad (10)$$

$$\prod_{q=\gamma}^{\beta} X_q = 1, \quad \text{当 } \gamma > \beta \text{ 时}, \quad (11)$$

二、引 理

引理1:若 $p \neq 0$ 是实数,则

$$\Delta_n \neq 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

证:由(4), (5), (8), (9)及归纳法即可得

$$\Delta_n > 0, \quad (p > 0, n=0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

$$\Delta_{2i} > 0, \quad \Delta_{2i+1} < 0 \quad (p < 0, i=0, 1, 2, \dots) \quad (14)$$

故(12)成立。

此外, 由 (13), (14) 可知, 当实数 $p \neq 0$ 时, $-A_n \Delta_{n-1}$ 和 $B_n \Delta_{n-1}$ 同号, 于是

$$|\Delta_n| = |A_n \Delta_{n-1}| + |B_n \Delta_{n-2}|, \quad (n=2, 3, \dots) \quad (15)$$

引理 2: 若 $n=2, 3, \dots$; $l=2, 3, \dots, n$, 则有

$$A_n G_{l-1}^{n-1} + B_n G_{l-2}^{n-2} = G_l^n \quad (16)$$

证: 由 (4) — (7) 直接验算可知 (16) 当 $l=2, 3$ 时成立. 今假定当 $l < m (m \leq n)$ 时 (16) 成立, 于是由归纳假定和 (7) 得

$$\begin{aligned} A_n G_{m-1}^{n-1} + B_n G_{m-2}^{n-2} &= A_n (A_{n+1-m} G_{m-2}^{n-1} + B_{n+2-m} G_{m-3}^{n-1}) \\ &\quad + B_n (A_{n+1-m} G_{m-3}^{n-2} + B_{n+2-m} G_{m-4}^{n-2}) \\ &= A_{n+1-m} (A_n G_{m-2}^{n-1} + B_n G_{m-3}^{n-2}) + B_{n+2-m} (A_n G_{m-3}^{n-1} + B_n G_{m-4}^{n-2}) \\ &= A_{n+1-m} G_{m-1}^n + B_{n+2-m} G_{m-2}^n = G_m^n. \end{aligned}$$

这表明当 $l=m$ 时, (16) 式也成立.

引理 3: 若 $n=0, 1, 2, \dots$, 则

$$\Delta_n = (-1)^n G_n^n \quad (17)$$

证: 由 (6), (8) 知 (17) 当 $n=0, 1$ 时成立. 若 (17) 当 $n < q$ 时成立, 则由 (9) 及引理 2 可得

$$\begin{aligned} \Delta_q &= -A_q \Delta_{q-1} + B_q \Delta_{q-2} = (-1)^q A_q G_{q-1}^{q-1} + (-1)^{q-2} B_q G_{q-2}^{q-2} \\ &= (-1)^q (A_q G_{q-1}^{q-1} + B_q G_{q-2}^{q-2}) = (-1)^q G_q^q \end{aligned}$$

所以 (17) 当 $n=q$ 时也成立.

引理 4: 若 $n=1, 2, 3, \dots$, $0 \leq l < n$, 则

$$\left(\prod_{q=n+1-l}^{n+1} B_q \right) \Delta_{n-1-l} - G_{l+1}^{n+1} \Delta_n = G_l^n \Delta_{n+1}. \quad (18)$$

证: 当 $l=0, 1$ 时, 由 (4), (5), (6), (8), (9) 可知 (18) 对于一切 $n > l$ 均成立, 今假定当 $l < \delta (\geq 2) < n$ 时, (18) 式成立, 则由引理 2 和 (9) 有

$$\begin{aligned} \left(\prod_{q=n+1-\delta}^{n+1} B_q \right) \Delta_{n-1-\delta} - G_{\delta+1}^{n+1} \Delta_n &= -A_{n+1} G_{\delta}^n \Delta_n + B_{n+1} \left[\left(\prod_{q=n+1-\delta}^n B_q \right) \Delta_{n-1-\delta} \right. \\ &\quad \left. - G_{\delta-1}^{n-1} \Delta_n \right] = -A_{n+1} \Delta_n G_{\delta}^n + B_{n+1} \left\{ B_n \left[\left(\prod_{q=n+1-\delta}^{n-1} B_q \right) \Delta_{n-1-\delta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - G_{\delta-1}^{n-1} \Delta_{n-2} \right] + A_n \Delta_{n-1} G_{\delta-1}^{n-1} \right\} \\ &= -A_{n+1} \Delta_n G_{\delta}^n + B_{n+1} (B_n G_{\delta-2}^{n-2} + A_n G_{\delta-2}^{n-1}) \Delta_{n-1} \\ &= G_{\delta}^n (-A_{n+1} \Delta_n + B_{n+1} \Delta_{n-1}) = G_{\delta}^n \Delta_{n+1} \end{aligned}$$

这表明当 $l = \delta$ 时, (18) 也成立。

根据引理 2, 4 及 (9), 由归纳法还可以证得 (18) 式的更一般情况:

引理 5: 若 j, n 是正整数, $0 \leq l < n$, 则

$$(-1)^{j-l} \left[\left(\prod_{q=n+1-l}^{n+1} B_q \right) \Delta_{n-1-l} G_{j+1}^{n+j} - G_{l+j}^{n+j} \Delta_n \right] = G_l^n \Delta_{n+l} \quad (19)$$

利用 (4) — (7), 由归纳法可得:

引理 6: 若 k, j 是正整数, $0 \leq l \leq j$, $\alpha = 0, 1, 2, \dots, K$, 则下列不等式成立:

$$|G_l^n| \leq (1 + |p|)^l \frac{[j(k+1) + \alpha]! (j-1-l)!}{[(j-1)(k+1) + \alpha - 2]! j!} \quad (20)$$

引理 7: 若 $n = 0, 1, 2, \dots$; $\alpha = 0, 1$, 则有不等式

$$[n(k+1) + \alpha]! \leq (k+1)^{3n} T_n! \quad (21)$$

其中

$$T_n = \frac{[n(k+1) + \alpha - 2]!}{[(n-2)(k+1) + \alpha]_{2(k+1)}! [(n-2)(k+1) + \alpha - 1]_{2(k+1)}!} \quad (22)$$

由 $(n)_m!$ 的定义即可证得。

三、存在性与唯一性

以下假定 $f(x, t)$, $\phi(x)$ 在原点附近解析, 即

$$f(x, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{ij} \frac{x^i t^j}{i! j!}, \quad |f_{ij}| \leq \frac{M_1 i! j!}{\rho^{i+j}} \quad (M_1 > 0, \rho > 0) \quad (23)$$

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \frac{x^i}{i!}, \quad |\phi_i| \leq \frac{M_1 i!}{\rho^i} \quad (M_1 > 0, \rho > 0) \quad (24)$$

定理 1: 若 k 是正整数, 实数 $p \neq 0$, $\phi(x)$, $f(x, t)$ 在原点附近解析, 则问题 (A_r^k) 在原点附近存在唯一解析解的充要条件是初值 $\phi(x)$ 在 $x = 0$ 附近的展开式具有形式

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha=0}^k \frac{\phi_{n(k+1)+\alpha}!}{[n(k+1) + \alpha]!} x^\alpha \right) x^{n(k+1)} \quad (25)_1$$

且当 $k > 1$; $\alpha = 2, 3, \dots, k$ 时

$$\phi_{n(k+1)+\alpha} = \sum_{l=0}^n G_l^n f_{(n-l)(k+1)+\alpha-2, 1} \quad (25)_2$$

证明: 必要性, 若 $u(x, t)$ 是问题 (A_r^k) 在原点附近的解析解, 则

$$u(x, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{ij} \frac{x^i t^j}{i! j!}, \quad u_{i,0} = \phi_i \quad (26)$$

当 $k=1$ 时, (25)₁ 等价于 (24), 因此必要性是显然的。当 $k>1$ 时, 由于 $\phi(x)$ 是解析的, 要证必要性只要证 (25)₂ 即可。为此, 将 (26) 代入方程 (2) (约定当 $i<0$ 时, $u_{i,j}=0$), 比较系数就可得 $u_{i,j}$ 所必须满足的方程为:

$$u_{i+2,j} - i(i-1)\cdots(i-2k+1)u_{i-2k,j+2} + i(i-1)\cdots(i-k+2)pu_{i-k+1,j+1} = f_{i,j} \\ (i,j=0, 1, 2, \cdots) \quad (27)$$

在 (27) 中令 $i=n(k+1)+\alpha-2$ ($n=0, 1, 2, \cdots; \alpha=2, 3, \cdots, k$)

由引理 2 及归纳法可证

$$u_{n(k+1)+\alpha,j} = \sum_{l=0}^n G_l^n f_{(n-l)(k+1)+\alpha-2,j+1} \quad (28)$$

$$(n,j=0, 1, 2, \cdots; \alpha=2, 3, \cdots, k)$$

在 (28) 中令 $j=0$, 就得到 (25)₂。

充分性, 在 (27) 中令 $i=k+1+\alpha-2, 2(k+1)+\alpha-2, \cdots, (n+j_1)(k+1)+\alpha-2$, 相应令 $j=n+j_1-1, n+j_1-2, \cdots, 1, 0$ 。并将 j_1 仍记为 j , 可得 $u_{\alpha,j+j}, u_{k+1+\alpha,j+j-1}, \cdots, u_{n(k+1)+\alpha,j}, \cdots, u_{(n+j-1)(k+1)+\alpha,j+1}$ 所应满足的方程组:

$$\sum_{r=1}^{n+j} C_{q,r} u_{(r-1)(k+1)+\alpha,n+j+1-r} = F_{q,n+j} \quad (29)$$

$$\left(\begin{array}{l} q=1, 2, \cdots, n+j; j=1, 2, 3, \cdots, \\ n=0, 1, 2, \cdots; \alpha=0, 1, 2, \cdots, k \end{array} \right)$$

其中

$$F_{q,n+j} = f_{q(k+1)+\alpha-2,n+j-q} - C_{q,n+j+1} \phi_{(n+j)(k+1)+\alpha}$$

$$C_{qq} = -A_q, C_{q,q-1} = -B_q, C_{q,q+1} = 1, C_{qr} = 0 (|q-r|>1)$$

用 Δ_{n+j} 表示方程组 (29) 的系数行列式, 因 $\Delta_1 = -A_1$; 若令 $\Delta_0 = 1$, 可得

$$\Delta_{n+j} = -A_{n+j} \Delta_{n+j-1} + B_{n+j} \Delta_{n+j-2} \quad (n+j=2, 3, \cdots) \quad (30)$$

由 (8), (9) 及引理 1 可知, 当 $p \neq 0$ 时, $\Delta_{n+j} \neq 0$, 因此一切 $u_{i,j}$ ($i=0, 1, 2, \cdots; j=1, 2, \cdots$) 均可由方程组 (29) 唯一确定, 且从 (29) 可解得:

$$u_{n(k+1)+\alpha,j} = \frac{(-1)^{i-1}}{\Delta_{n+j}} \left[G_{i-1}^{n+j} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\prod_{q=n+1-l}^{n+1} B_q \right) \Delta_{n-1-l} f_{(n-l)(k+1)+\alpha-2,j+2} \right. \\ \left. + \Delta_n \left(\sum_{l=0}^{i-1} G_l^{n+j} f_{(n+j-l)(k+1)+\alpha-2,j+1} - \phi_{(n+j)(k+1)+\alpha} \right) \right] \quad (31)$$

其中 $n=0, 1, 2, \cdots; j=1, 2, \cdots; \alpha=0, 1, 2, \cdots, k$ 。当 $k>1$ 时, 对于 $\alpha=2, 3, \cdots, k$; 由条件 (25)₂ 及引理 3, 引理 5, 从 (31) 便可证得 $u_{n(k+1)+\alpha,j}$ 满足 (28)。在 (31) 中令 $n=0$, 即得

$$u_{\alpha,j} = \frac{(-1)^j}{\Delta_j} \left[\phi_{j(k+1)+\alpha} - \sum_{i=0}^{j-1} G_i f_{(j-1)(k+1)+\alpha-2,j+1} \right] \quad (32)$$

从 (15), 容易推得不等式

$$|\Delta_j|^{-1} \leq M_2 \frac{(j+2)!(k+1)^{j+1}\alpha!}{[j(k+1)+\alpha]!}, \quad M_2 = \max\{|p|^{-1}, 1\} \quad (33)$$

其中 $\alpha = 0, 1, 2, \dots, k$.

由 (23), (24), (33) 及引理 6, 可从 (32) 得到估计式:

$$|u_{\alpha,j}| \leq M \frac{j!}{\rho_0^j} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots, k; j = 0, 1, 2, \dots) \quad (34)$$

$$\text{其中 } M = M_1 M_2 (k+1)^2 k! \max_{\alpha} (\rho^{-\alpha} + \rho^{2-\alpha}) \quad (35)$$

$$\rho_0 = \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)^3 [1 + (1 + |p| \rho^k)]} \quad (36)$$

不等式 (34) 表明级数:

$$u(0,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{0,j} \frac{t^j}{j!} \text{ 和 } u_x(0,t) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{1,j} \frac{t^j}{j!} \text{ 收敛。}$$

而级数 (26) 可看作是由这两个初值条件和方程 (1) 所确定, 由 Cauchy-Kowalewski 定理可知 (26) 收敛, 从而断定问题 (A_1^k) 在原点附近存在唯一的解析解。

定理 2: 若 $p = 0$, 则问题 (A_1^k) 的解恒不唯一。

证: 因为当 $p = 0$ 时, 相应的齐次问题恒有非零解 $u(x,t) = (c_1 x + c_2) t$, 其中 c_1, c_2 为任意常数, 因此解不唯一。

定理 3: 若 $p = 0$, $\phi(x)$ 和 $f(x,t)$ 在原点附近解析, 则问题 (A_1^k) 在原点附近存在解析解的充要条件是

$$\phi_{2n(k+1)+\alpha} = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{q=n+1-i}^n B_{2q} \right) f_{2(n-1)(k+1)+\alpha-2,j+2} \quad (37)$$

$$(\alpha = 2, 3, \dots, 2k+1; n = 0, 1, 2, \dots)$$

证: 必要性, 若问题 (A_1^k) 当 $p = 0$ 时, 在原点附近存在解析解 (26), 则其系数 $u_{i,j}$ 必满足方程:

$$u_{i+2,j} - i(i-1)\cdots(i-2k+1)u_{i-2k,j+2} = f_{i,j} \quad (38)$$

$$(i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

在 (38) 中令 $i = 2n(k+1) + \alpha - 2$ ($\alpha = 2, 3, \dots, 2k+1; n = 0, 1, 2, \dots$)

用归纳法可推得

$$u_{2n(k+1)+\alpha,j} = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{q=n+1-i}^n B_{2q} \right) f_{2(n-1)(k+1)+\alpha-2,j+2} \quad (39)$$

$$(n, j=0, 1, 2, \dots; \alpha=2, 3, \dots, 2k+1)$$

在 (39) 中, 令 $j=0$, 即得 (37)。

充分性, 将形式解 (26) 的系数应满足的方程 (38) 改写成

$$u_{i,j} = \frac{i!}{(i+2k)!} \left[u_{i+2(k+1),j-2} - f_{i+2(k+1)-2,j-2} \right], \quad (40)$$

$$(i=0, 1, 2, \dots; j=2, 3, \dots)$$

从 (40) 可推得

$$\begin{aligned} u_{2n(k+1)+\alpha, 2\lambda+\beta} &= \left(\prod_{q=n+1}^{n+\lambda} B_{2q}^{-1} \right) u_{2(n+\lambda)(k+1)+\alpha, \beta} - \\ &\sum_{l=0}^{\lambda-1} \left(\prod_{q=n+l+1}^{n+\lambda} B_{2q} \right) f_{2(n+\lambda-1)(k+1)+\alpha-2, 2l+\beta_0} \end{aligned} \quad (41)$$

$$(\beta=0, 1; \alpha=0, 1, 2, \dots, 2k+1; n, \lambda=0, 1, 2, \dots)$$

设 $\phi(x)$ 为在 $x=0$ 附近解析且满足条件:

$$\begin{aligned} \psi[2n(k+1)+\alpha]_{(0)} &= \sum_{l=0}^n \left(\prod_{q=n+1-l}^n B_{2q} \right) f_{2(n-l)(k+1)+\alpha-2, l+2l} \\ &(\alpha=2, 3, \dots, 2k+1; n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (42)$$

的任一函数。在 (41) 中令

$$u_{i,0} = \phi^{(i)}(0) = \phi_i, \quad u_{i,1} = \psi^{(i)}(0) = \psi_i \quad (43)$$

就可确定一个形式解 (26) 的一切系数 $u_{i,j}$, 由条件 (37), (42) 可知这样求得的 $u_{i,j}$ 满足 (39)。显然, 对于不同的 $\psi(x)$ 可以求得不同的形式解。

在 (41) 中令 $n=0$; $\alpha=0, 1$, 并记 $g_i^0 = \phi_i$, $g_i^1 = \psi_i$, 则可得

$$u_{\alpha,j} = T_{2\lambda}^{-1} B_{2\lambda(k+1)+\alpha}^{-1} - \sum_{l=0}^{\lambda-1} T_{2(1+l)}^{-1} f_{2(1+l)(k+1)+\alpha-2, j-2(1+l)} \quad (44)$$

其中 $j=0, 1, 2, \dots$; $\lambda = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$, $\beta = j - 2\lambda$ 。

由 (44), 引理 7 及明显的事实: $(2l+1)![j-2(1+l)]! \leq j!$, 可证得不等式 (34), 于是类似于定理 1 的证明可知上面求得的形式解收敛。

从定理 3 的证明可推知

定理 4: 若 $p=0$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ 在原点附近解析, 则问题

$$\begin{cases} L_r^k u = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

在原点附近存在唯一解析解的充要条件是 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 分别满足条件 (37), (42)。

将 (31), (41) 代入 (26) 就可得到问题 (A_r^k) 的解析解的明确表达式。此外, 从

(25)₂, (37) 容易看出: 在齐次方程 (1) 的相应问题中, 初值 $\phi(x)$ 展开幂级数时必须缺项的原因。

本文在撰写过程中曾得到杭州大学郑兴礼教授的具体指导, 特此致谢!

参 考 文 献

- [1] F. Treves Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem, proc, Amer, Math Soc. 46(1974), 229—233.
- [2] 王光寅, 麦文激, 陆柱家·始值问题的存在性中的离散现象·中国科学, 1979; 8: 752—758.
- [3] Yang Guangun, On the parabolicity of an equation with double characteristics, 1980年北京“双微”会议上的报告.
- [4] 郑兴礼·关于退化方程的一个始值问题·科学通报, 1981; 26: 1406.
- [5] 郑兴礼·一类退化方程的初值问题·科学通报, 1982; 27: 1480—1482.
- [6] 邱佩璋, 陈文成, 栾文贵·关于始值问题离散现象的一个注记·数学学报, 24 1981; 5: 731—752
- [7] 杨光俊, 1981年10月在全国线性偏微分方程定性理论研究会上的报告.

Some Initial Value Problems for a Specific Nonhomogeneous Degenerate Equations

Tang Luqian

ABSTRACT

In this paper, we discuss some initial value problems for nonhomogeneous degenerate equations of form:

$$\begin{cases} L_p^k u \equiv u_{xx} - x^{2k} u_{tt} + p x^{k-1} u_t = f(x, t) \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

($k = 0, 1, 2, \dots$, p is real)

and present an implicit and analytic solution to it.