第10卷 第3期 华东交通大学学报 Vol.10 No. 3
1993年 9月 Journal of East China Jiaotong University Sep. 1993

可图的循环置换群

周尚超

（基础课部）

摘 要

设$\sigma=\sigma_1\sigma_2$是两个不交的轮换之积。本文得到了由σ生成的群$\langle\sigma\rangle$是图的自同构群的充分必要条件。

关键词：图；自同构群；循环群

设F是顶点集X上的置换群，G是顶点集为X的无向简单图。若F是G的自同构群Aut G，则称F是可图的。Kagno[①]和Chao[②]证明了由一个轮换θ（$|\theta|>2$，$|\theta|$表示轮换θ的长度）生成的群$\langle\theta\rangle$是不可图的。S. P. Mohanty等人证明了[③]：设$\sigma=\sigma_1\sigma_2$是两个不交的轮换之积，若$|\sigma_2|$整除$|\sigma_1|$且$|\sigma_2|>5$，则$\langle\sigma\rangle$是可图的。本文证明了如下的更一般的结果。

定理 设$\sigma=\sigma_1\sigma_2$，$\min\{|\sigma_1|,|\sigma_2|\}>2$则$\langle\sigma\rangle$可图的充要条件是$\gcd(|\sigma_1|,|\sigma_2|)>5$。这里gcd表示最大公因数。

有限群论中有如下的引理。

引理 $|F|=|F_i|\cdot|F(i)|$。这里$F_i=\{f|f\in F, f(i)=i\}$，$F(i)=\{f(i)|f\in F\}$，i是X中某个元素。

先证充分性。设$\sigma=(1,2,\cdots,m)(\bar{1},\bar{2},\cdots,\bar{n})$，$\gcd(m,n)=g>5$。记$X=X'\cup\bar{X}$，$X'=\{1,2,\cdots,m\}$，$\bar{X}=\{\bar{1},\bar{2},\cdots,\bar{n}\}$。作图G，使得G的顶点集为X且$\mathrm{Aut}G=\langle\sigma\rangle$。令G的以X'为顶点集的导出子图$G_1$是一个圈：$G_1=12\cdots m1$，另一个导出子图$G_2$也是一个圈：$G_2=\overline{1}\overline{2}\cdots\overline{n}\overline{1}$。设$X_i=\{j|j\in X', j=i\ (\mathrm{mod}\,g)\}$，$\overline{X_i}=\{\bar{j}|\bar{j}\in\bar{X}, j=i\ (\mathrm{mod}\,g)\}$。X'中的顶点与$\bar{X}$中的顶点是这样邻接的：若$j\in X_i$，则与j邻接的$\bar{X}$中的顶点集是$\overline{X_i}\cup\overline{X_{i+1}}\cup\overline{X_{i+3}}$，这里$\bar{X}$的下标按模g运算。$G_i$的每个顶点的度都是$d_i$：$d_1=2+3\frac{n}{g}$，$d_2=2+3\frac{m}{g}$。当m=n时，文[3]中已证明。设$m\neq n$，则$d_1\neq d_2$。因此，若$\tau\in\mathrm{Aut}\,G$，则$\tau=\tau_1\tau_2$，$\tau_i\in\mathrm{Aut}\,G_i$。显然$\sigma\in\mathrm{Aut}\,G$，$\sigma$的阶是$mn/g$，因此$|\mathrm{Aut}\,G|\geqslant mn/g$。要证$\mathrm{Aut}\,G=\langle\sigma\rangle$，只要证$|\mathrm{Aut}\,G|\leqslant mn/g$。设$F=\mathrm{Aut}\,G$。显然$F(1)=m$。由引理，只要证$|F_1|\leqslant n/g$。设$\tau=\tau_1\tau_2\in F$，$\tau(1)=1$。因为$G_1$是一个圈，Aut G_1是二面体群，因此$\tau_1=\varepsilon_1$（X'上的恒等置换或群Aut G_1的单位元）或$\tau_1=(1)(2,m)(3,m-1)\cdots$。用$i-Y$表示与i邻接的$\bar{X}$中的顶点集是Y，则：

本文于1993年2月27日收到

$1-\overline{X_1}\cup\overline{X_2}\cup\overline{X_4}$

$2-\overline{X_2}\cup\overline{X_3}\cup\overline{X_5}$

$3-\overline{X_3}\cup\overline{X_4}\cup\overline{X_6}$

………………

$m-1-\overline{X_{g-1}}\cup\overline{X_g}\cup\overline{X_2}$

$m-\overline{X_g}\cup\overline{X_1}\cup\overline{X_3}$

设 $\tau_1=(1)(2,m)(3,m-1)\cdots$。$\tau(1)=1$，所以 τ 把与 1 邻接的点映射为与 1 邻接的点，因此有 $\tau(\overline{X_2})\subseteq\overline{X_1}\cup\overline{X_2}\cup\overline{X_4}$。由于 $\tau(2)=m$，所以 τ 把与 2 邻接的点映射为与 m 邻接的点，因此 $\tau(\overline{X_2})\subseteq\overline{X_g}\cup\overline{X_1}\cup\overline{X_3}$。所以 $\tau(\overline{X_2})=\overline{X_1}$。$\tau(m-1)=3\Rightarrow\tau(\overline{X_2})\subseteq\overline{X_3}\cup\overline{X_4}\cup\overline{X_6}$，矛盾。因此必有 $\tau_1=\varepsilon_1$，$\tau(1)=1$ 且 $\tau(2)=2\Rightarrow\tau(\overline{X_2})=\overline{X_2}$，$\tau(2)=2$ 且 $\tau(3)=3\Rightarrow\tau(\overline{X_3})=\overline{X_3}$，依此类推。得 $\tau(\overline{X_i})=\overline{X_i}$，$i=1,2,\cdots,g$。因为 G_2 是圈，Aut G_2 中满足 $\tau_2(\overline{X_i})=\overline{X_i}$ $(i=1,2,\cdots,g)$ 的元素最多只有 n/g 个，因此 $|F_1|\leqslant n/g$。Aut $G=\langle\sigma\rangle$，$\langle\sigma\rangle$ 是可图的。充分性证毕。

再证必要性。设 $\gcd(m,n)=g\leqslant 5$，我们要证明 $\langle\sigma\rangle$ 是不可图的。设 $\langle\sigma\rangle$ 可图，Aut $G=\langle\sigma\rangle$，$g=5$。这时按模 5 分类，有 $X'=X_1\cup X_2\cup X_3\cup X_4\cup X_5$，$\overline{X}=\overline{X_1}\cup\overline{X_2}\cup\overline{X_3}\cup\overline{X_4}\cup\overline{X_5}$。易见，若 1 与 $\overline{X_1}$ 中的一个点邻接，则 1 与 $\overline{X_1}$ 的所有点邻接。设 $\{\overline{X_1},\overline{X_2},\overline{X_3},\overline{X_4},\overline{X_5}\}$ 中与 1 邻接的子集有 a 个。若 $a\geqslant 3$，则在 G 的补图 $\overline{G}$ 中，与 1 邻接的子集少于 3 个。由于 Aut $G=$ Aut $\overline{G}$，因此可设 $a\leqslant 2$。若 $a=0$，即 1 与 $\overline{X}$ 中的点不邻接，这时 X' 中的所有顶点不与 $\overline{X}$ 中的顶点邻接。设 $\tau_1=(1)(2,m)(3,m-1)\cdots$，则 $\tau_1\in$ Aut G，矛盾。设 $a=1$。不妨设 1 与 $\overline{X_1}$ 邻接（因为若 1 与 $\overline{X_i}$ 邻接，则可将 $\overline{X_i}$ 重新标号为 $\overline{X_1}$）。设 $\tau_2=(\overline{1})(\overline{2},\overline{n})(\overline{3},\overline{n-1})\cdots\cdots$。易知 $\tau_1\tau_2\in$ Aut G，矛盾。设 $a=2$，不妨设与 1 邻接的 $\overline{X}$ 中的点集为下列两种情况之一。

情况 1　1 与 $\overline{X_1}\cup\overline{X_2}$ 邻接。

情况 2　1 与 $\overline{X_1}\cup\overline{X_3}$ 邻接。

对于情况 1，设 $\tau_3=(\overline{1},\overline{2})(\overline{n},\overline{3})(\overline{n-1},\overline{4})\cdots$，易知 $\tau_1\tau_3\in$ Aut G，矛盾。对情况 2，设 $\tau_4=(\overline{1},\overline{3})(\overline{n},\overline{4})(\overline{n-1},\overline{5})\cdots$，易知 $\tau_1\tau_4\in$ Aut G，矛盾。因此 $\langle\sigma\rangle$ 是不可图的。类似地可证，当 $g<5$ 时 $\langle\sigma\rangle$ 是不可图的。证毕。

参 考 文 献

[1] J. N. Kagno, Linear graphs of degree≤6 and their groups, Amer. J. Math, 68 (1946), 505—520

[2] C. Y. Chao, On a theorem of Sabidussi, Proc. Amer. Math. Soc, 15 (1964), 291—292

[3] S. P. Mohanty, M. R. Sridharan and S. K. ShuKla, Graphical cyclic permutation groups, Combinatorics and Graph Theory. lecture Notes in Math. 885. Springer—Verlag, 1980, 339—346

On Graphical Cyclic Permutation Groups

Zhou Shangchao

ABSTRACT

In this note. The following theorem is obtained.

Theorem Let $\sigma = (1, 2, \cdots, m)(\bar{1}, \bar{2}, \cdots, \bar{n})$, then $\langle\sigma\rangle$ is graphical if and only if gcd $(m, n) > 5$.

Key words: Graph; Automorphism group; Cyclic group