鲁棒特征结构配置

易宜连

（电气工程系）

摘 要

本文利用区间多项式的稳定理论和状态反馈阵K的参数化表示，对多输入多输出（MIMO）动态区间系统提出了一种鲁棒特征结构配置的设计方法。

关键词：区间多项式；动态区间系统；鲁棒控制；特征结构配置

0 引 言

对于线性定常MIMO系统，用线性状态反馈来配置特征结构，在现代控制理论与实践中已形成为最主要的课题之一，这是因为系统动态响应衰减（或发散）的变化率取决于其特征值，而动态响应的形状则依赖于左、右特征向量。控制系统的设计者在使用状态反馈阵配置特征结构时，是假定了系统的数学模型是准确的。然而，事实并非如此，往往由于种种原因，只能得到近似的系统数学模型，尤其是当系统受到扰动时，其参数会发生某些变化，有时这种变化是显著的，这就会危及到系统赖以生存的稳定性。文献[1]、[2]、[3]虽然讨论了特征结构配置问题，但均未涉及到如何利用反馈阵K的非唯一性来获得鲁棒控制。为了确保系统参数在一定范围内变化时，闭环系统仍然是稳定的，本文在上述文献研究的基础上，对MIMO动态区间系统提出了一种鲁棒特征结构配置的设计方法。

1 特征结构配置参数化

1.1 特征向量参数化

假定线性定常MIMO能控系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

其中$x(t) \in R^n$，$u(t) \in R^r$，$A \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times r}$。不失一般性，令$rank(B) = r < n$，系统（1）可通过状态反馈配置特征值。设

$$u(t) = Kx(t) \tag{2}$$

其中$K \in R^{r\times n}$，引入状态反馈后，闭环系统动态方程为

本文于1993年6月23日收到

$$\dot{x}(t)=(A+BK)x(t)=A_c x(t) \tag{3}$$

闭环系统矩阵 A_c 的特征多项式为

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I_n - A_c|=\frac{|\Delta_0(\lambda)I_n-\phi(\lambda)BK|}{\Delta_0^{n-1}(\lambda)} \tag{4}$$

其中 $\Delta_0(\lambda) \triangleq |\lambda I_n - A|$,

$\psi(\lambda) \triangleq adj(\lambda I_n - A)$

根据矩阵行列式的恒等变换，式（4）可改写为

$$\Delta(\lambda)=\frac{|\Delta_0(\lambda)I_n-BK\psi(\lambda)|}{\Delta_0^{n-1}(\lambda)} \tag{5}$$

令闭环系统的期望特征值集合 $\Lambda(A_c)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，开环系统的特征值集合 $\Lambda(A)=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$。当 $\Lambda(A_c)\cap\Lambda(A)=\Phi$，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是闭环系统特征值的必要与充分条件为式（5）等于零。即

$$\Delta(\lambda_i)=0$$

等价于

$$[\Delta_0(\lambda_i)I_n-BK\psi(\lambda_i)]f_i=0 \tag{6}$$

有非零参数向量解 f_i，即

$$BK\psi(\lambda_i)f_i=\Delta_0(\lambda_i)f_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

从而得出结论

定理1 给定 $\Lambda(A_c)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$。若 $\Lambda(A_c)\cap\Lambda(A)=\Phi$，则凡满足方程(7)的向量 $\psi(\lambda_i)f_i$ 必为 A_c 关于 λ_i 的特征向量。

证明 $\because (\lambda_i I_n - A - BK)\psi(\lambda_i)f_i=(\lambda_i I_n - A)\psi(\lambda_i)f_i - BK\psi(\lambda_i)f_i$

$=\Delta_0(\lambda_i)f_i-\Delta_0(\lambda_i)f_i=0$

$\therefore \lambda_i$ 和 $\psi(\lambda_i)f_i$ 分别是 A_c 特征值和特征向量。

若 $\Lambda(A_c)\cap\Lambda(A)\neq\Phi$，即有公共元素，例 $\lambda_j=S_j$，则式（4）改为

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I_n - A - BK|=\frac{|\Delta_I(\lambda)I_n+\psi_I(\lambda)(I_n-BK)|}{\Delta_0^{n-1}(\lambda)} \tag{8}$$

其中 $\Delta_I(\lambda) \triangleq |\lambda I_n - A - I_n|$，$\psi_I(\lambda) \triangleq adj(\lambda I_n - A - I_n)$

λ_j（$=s_j$）是闭环系统特征值的必要与充分条件为（8）式等于零，即

$$\Delta(\lambda_j)=0 \qquad (\Delta_I(j)\neq 0)$$

等价于

$$[\Delta_I(\lambda_j)I_n+(I_n-BK)\psi_I(\lambda_j)]f_j=0 \tag{9}$$

有非零参数向量解 f_j，即

$$(BK-I_n)\psi_I(\lambda_j)f_j=\Delta_I(\lambda_j)f_j \tag{10}$$

从而得出结论

定理2 给定 $\Lambda(A_c)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_j,\cdots,\lambda_n\}$。其中 λ_j 等于开环系统 A 的特征值 S_j，则凡满足方程(10)的向量 $\psi_I(\lambda_j)f_j$ 必为 A_c 关于 λ_j 的特征向量。

证明 $\because (\lambda_j I_n - A - BK)\psi_I(\lambda_j)f_j=(\lambda_j I_n - A - I_n)\psi_I(\lambda_j)f_j$

$+(I_n-BK)\psi_I(\lambda_j)f_j=\Delta_I(\lambda_j)f_j-\Delta_I(\lambda_j)f_j=0$

$\therefore \psi_I(\lambda_j)f_j$ 是 A_c 关于 λ_j 的特征向量。

1.2 状态反馈阵 K 的参数向量表达式

设 $\Lambda(A_c)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$，对应的特征向量为 V_1、V_2、…、V_n，则有

$$[A-I_n\lambda_i \quad B]\begin{pmatrix}V_i\\ q_i\end{pmatrix}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{11}$$

式中 $q_i=KV_i$，于是有

$$[q_1q_2\cdots q_n]=K[V_1V_2\cdots V_n] \tag{12}$$

若 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 线性独立，则有

$$K=[q_1q_2\cdots q_n][V_1V_2\cdots V_n]^{-1} \tag{13}$$

由式(7)得

$$Bq_i=\Delta_0(\lambda_i)f_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{14}$$

或由式(10)得

$$Bq_i=\Delta_1(\lambda_i)f_i+\psi_1(\lambda_i)f_i \tag{15}$$

定理3　若选取参数向量 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 满足：

(1) 当 $\lambda_i\in R$，$f_i\in R^n$；当 $\lambda_i=\lambda_{i+1}^*\in C$，$f_i=f_{i+1}^*\in C^n$（$*$ 表示共轭）

(2) 特征向量 $\psi(\lambda_1)f_1$，$\psi(\lambda_2)f_2$，…，$\psi(\lambda_n)f_n$ 线性独立

(3) $\mathrm{rank}([B:\Delta_0(\lambda_i)f_i])=\mathrm{rank}(B)=r \qquad (i=1,2,\cdots,n)$

则状态反馈阵 K 的参数向量表达式

$$K=[q_1q_2\cdots q_n][\psi(\lambda_1)f_1 \quad \psi(\lambda_2)f_2\cdots\psi(\lambda_n)f_n]^{-1} \tag{16}$$

证明　显然。

当 $\Lambda(A_c)\cap\Lambda(A)\neq\phi$，有类似的定理。

2 鲁棒特征结构配置的设计方法

令 $A_M=(a_{1M},a_{2M},\cdots a_{nM})$，$A_m=(a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm})$，其中 a_{iM}、a_{im} 是实数，且 $a_{im}\leqslant a_{iM}$　$(i=1,2,\cdots,n)$ 一切多项式

$$f_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \tag{17}$$

的集合记为 $S[A_m,A_M]$，其中 $a_{im}\leqslant a_i\leqslant a_{iM}$　$(i=1,2,\cdots,n)$，则多项式 $f_n(z)\in S[A_m,A_M]$ 称为区间多项式。式(17)中满足关系式 $a_i=a_im$，或 $a_i=a_{iM}(i=1,2,\cdots,n)$ 的一切多项式集合记为 $T[A_m,A_M]$，它包含着 2^n 个多项式。令一切 n 次稳定多项式集合为 G^n。

引理[2]　$S[A_m,A_M]\in G^n$，如果 $T[A_m,A_M]\in G^n$。

设MIMO动态区间系统的系统矩阵 $A=[a_{ij}]$，其中 $a_{ij}^m\leqslant a_{ij}\leqslant a_{ij}^M$，$a_{ij}^m$，$a_{ij}^M$ 均为实数，且 $a_{ij}^m\leqslant a_{ij}^M$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 A 为区间矩阵，则闭环系统特征多项式

$$|\lambda I_n-A_c|=|\lambda I_n-A-BK|$$

为区间多项式。根据引理及定理3便得出鲁棒特征结构配置的设计方法如下：

第一步　根据系统标称矩阵 A^0 和期望特征值 λ_i，计算

$$BK=[\Delta_0(\lambda_1)f_1\Delta_0(\lambda_2)f_2\cdots\Delta_0(\lambda_n)f_n][\psi(\lambda_1)f_1\psi(\lambda_2)f_2\cdots\psi(\lambda_n)f_n]^{-1}$$

式中 f_1，f_2，…，f_n 待定。

第二步　求出闭环系统特征多项式

$|\lambda I_n - A - BK| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$，它为区间多项式，包含着待定向量参数 f_1、f_2，…，f_n。

第三步　选定 f_1，f_2，…，f_n，确定第二步中区间多项式系数 a_1，a_2，…，a_n 的最大值 a_{1M}，a_{2M}，…，a_{nM} 和最小值 a_{1m}，a_{2m}，…，a_{nm}。

第四步　计算满足关系式 $a_i=a_{im}$ 或 $a_i=a_{iM}$（i=1，2，…n）的 2^n 个多项式 $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$，选定的向量参数 f_1，f_2，…，f_n 应使这 2^n 个多项式均是 Hurwitz 的，若不满足，则返回到第三步，否则，执行第五步。

第五步　校验 f_1，f_2，…，f_n 是否满足定理 3，若不满足，则返回到第三步，否则，执行第六步。

第六步　计算 K

$$K = [q_1 q_2 \cdots q_n][\psi(\lambda_1) f_1 \psi(\lambda_2) f_2 \cdots \psi(\lambda_n) f_n]^{-1}$$

3　算例

设动态区间系统

$$A=\begin{bmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

式中 $a\in[0.8,\ 1.5]$，$b\in[0.8,\ 1.2]$，$c\in[0.7,\ 1.3]$

标称系统矩阵

$$A^0=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

期望闭环系统特征值集合 $\Lambda(A_c)=\{-1,\ -2+i,\ -2-i\}$，求状态反馈阵 K，对 A^0 能配置期望特征值集合 $\Lambda(A_c)$，且当系统矩阵 A 的变元 a、b、c 在给定区间内变化时，闭环系统仍然是稳定的。

按鲁棒特征结构配置设计步骤，当选定

$$f_1=\begin{bmatrix}0\\ -\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix},\qquad f_2=\begin{bmatrix}0\\ \frac{3}{25}-\frac{1}{25}i\\ -\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i\end{bmatrix},\qquad f_3=\begin{bmatrix}0\\ \frac{3}{25}+\frac{1}{25}i\\ -\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i\end{bmatrix}$$

求得

$$K=\begin{bmatrix} 2.764 & 2.764 & -2.007 \\ -2.400 & -3.375 & -1.265 \end{bmatrix}$$

4 结论

本文对MIMO动态区间系统，利用区间多项式稳定理论及本文中的定理3提出的鲁棒特征结构配置的设计方法，在控制工程设计中具有一定的实践意义。采用该法求得的状态反馈阵K，既能使由它构成的闭环系统对标称系统矩阵A^c配置期望的特征值，又能使系统参数在一定区间变化时，保证闭环系统仍然是稳定的，即鲁棒稳定。

参 考 文 献

〔1〕 Roppenecker G. On parametric state Feedback Design. Int J Control, 1986; 43 (3): 793～804

〔2〕 Roppenecker G and O'reilly J · Parametric Output Feedback Centroller Design. Automatica, 1989; 25 (2): 259～265

〔3〕 Fahmy M M and O'reilly J · Multistage parametric Eigenstructure Assignment by out—Feedback Control · Int J Control, 1988; 48 (1): 97～116

〔4〕 Evans R J and Xie Xianya · Robust Regulator Design · Int J Confrol, 1985; 41 (2): 461～476

Robust Eigenstructure Assignment

Yi Yilian

ABSTRACT

In this paper a design method of robust eigenstructure assigenement is proposed by using interval polynomial stable theory and parametric presentation of state feedback matrix k for MIMO dynamic interval system.

Key words: Interval polynomial; Dynamic interval system; Robust control; Eigenstructure assigenment