正则图的直径与平均距离

徐 保 根

(基础课部)

摘 要

本文主要研究n阶K正则连通图的直径与平均距离的关系。并给出直径为d,围长$g\geqslant 2d-1$的n阶K正则连通图的平均距离的计算公式。

关键词:正则图;直径;围长;平均距离

0 引 言

本文所指的图均为无向简单图。若G为n阶连通图,G的平均距离记为$\overline{D}(G)$,定义为:

$$\overline{D}(G)=d-\sum_{\substack{u\neq v\\ u,v\in V(G)}} d_G(u,v)\Big/\binom{n}{2}$$

其中:$d_G(u,v)$表示u,v两点在G中的距离。

对于一个图G,G的s次方幂记为G^s,定义为:$V(G^s)=V(G)$

$E(G^s)=\{e=uv\mid u,v\in V(G),d_G(u,v)\leqslant s\}$

其它未说明的符号和定义同于文[1]。

1 主要结论及其证明

引理1 若G为n阶连通图,且其直径为$d(G)=d$,则图G的平均距离为:

$$\overline{D}(G)=d-\sum_{i=1}^{d-1}|E(G^i)|\Big/\binom{n}{2}$$

其中:$|E(G^i)|$表示图G^i的边数。

本文于1993年元月12日收到

证　令：
$$S(G)=\sum_{\substack{u\neq v\\ u,v\in V(G)}} d_G(u,v)$$

则有
$$\begin{aligned}S(G)&=|E(G)|+2\left(|E(G^2)|-|E(G)|\right)+3\left(|E(G^3)|-|E(G^2)|\right)\\&\quad+\cdots+d\cdot\left(|E(G^d)|-|E(G^{d-1})|\right)\\&=d|E(G^d)|-\left(|E(G)|+|E(G^2)|+\cdots+|E(G^{d-1})|\right)\\&=d\binom{n}{2}-\sum_{i=1}^{d-1}|E(G^i)|\end{aligned}$$

即：
$$\overline{D}(G)=S(G)\Big/\binom{n}{2}=d-\sum_{i=1}^{d-1}|E(G^i)|\Big/\binom{n}{2}$$

引理1证毕。

推论1．1　若(n,q)图G的直径为2，则其平均距离$\overline{D}(G)=2-q\binom{n}{2}^{-1}$

推论1．2　若G为n阶K正则图，且$K\geqslant\frac{n-1}{2}$，则G的平均距离：
$$\overline{D}(G)=2-\frac{Kn}{2}\binom{n}{2}^{-1}=2-\frac{K}{n-1}$$

推论1．3　若$G=Cn$为一个圈，则G的平均距离为：
$$\overline{D}(G)=\overline{D}(Cn)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{4} & n\text{ 为奇数}\\[2mm] \dfrac{n^2}{4n-4} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

证　推论1．1是显然的。在推论1．2中，由于，$K\geqslant\frac{n-1}{2}$，故G的直径$d(G)\leqslant 2$。即得知。

对于推论1．3、由$G=Cn$，故G^i为2i度正则图$(1\leqslant i\leqslant d-1)$。其中$d=\left[\frac{n}{2}\right]$为G的直径。

故有：$|E(G^i)|=in\ (1\leqslant i<d-1)$，由引理1即得。证毕。

由于推论1．2和1．3，下面我们只需要考虑$3\leqslant k<\frac{n-1}{2}$时的情况：

引理2　若G为n阶K正则连通图$(K\geqslant 3)$则：

(1) $|E(G^i)|\leqslant nK[(K-1)^i-1]\big/(2K-4)$　　$(1\leqslant i\leqslant d-1)$

其中：$d>2$为G的直径。

(2) 在(1)式中，等号成立当且仅当G的围长$g(G)\geqslant 2i+1$。

证　(1)对于任意一点$v\in V(G)$

令：$Sj(v)=\{u\in V(G)\,|\,d_G(u,v)=j\}$

由归纳法不难证明：$|Sj(v)|\leqslant K(K-1)^{j-1}$。

记：$K_i=d_{G^i}(v)$表示v点在G^i中的度数，

则有：

$$K_i=\sum_{j=1}^{i}|S_j(v)|\leqslant\sum_{j=1}^{i}K(K-1)^{j-1}=K[(K-1)^i-1]\Big/(K-2)$$

由 v 点的任意性：

$$|E(G^i)|=\sum_{v\in V(G)}d_{G^i}(v)\Big/2\leqslant nK[(K-1)^i-1]\Big/(2K-4)$$

(2) 由上述证明可见：(1)式中等号成立当且仅当对任意 $v\in V(G)$，有：

$$|S_j(v)|=K(K-1)^{j-1}\qquad(j=1,2,\cdots,i)$$

上式成立等价于：$S_j(v)$中任何一点仅与$S_{j-1}(v)$中一个点邻接$(j=1,2,\cdots,i)$，且当 $j<i$ 时，$S_j(v)$中任意两点不邻接，这表明 v 点不在任何长度不超过2i 的圈中，由 v 点的任意性，上述等价于 G 的围长 $g(G)\geqslant 2i+1$。引理2证毕。

定理1 若 G 为 n 阶 K 正则连通图（$K\geqslant 3$），$d>2$为 G 的直径，则：G 的平均距离：

$$\overline{D}(G)\geqslant\frac{nK-2n+2}{(K-2)(n-1)}d-\frac{K[(K-1)^d-1]}{(K-2)^2(n-1)}\qquad(*)$$

当且仅当 $g(G)\geqslant 2d-1$时上式等号成立。

证 由引理2：

$$\sum_{i=1}^{d-1}|E(G^i)|\leqslant\frac{nK}{2K-4}\cdot\sum_{i=1}^{d-1}\Big[(K-1)^i-1\Big]\qquad(1)$$

$$\sum_{i=1}^{d-1}|E(G^i)|\leqslant\frac{nK}{2K-4}\Big[\frac{(K-1)^d-1}{K-2}-d\Big]$$

(1) 式等号成立当且仅当对每个 $i=1,2,\cdots d-1$，

均有 $g(G)\geqslant 2i+1$，即等价于 $g(G)\geqslant 2d-1$。

由引理1及 (1) 式得：

$$\begin{aligned}\overline{D}(G)&=d-\sum_{i=1}^{d-1}|E(G^i)|\Big/\binom{n}{2}\\&\geqslant d-\frac{nK}{2K-4}\cdot\Big[\frac{(K-1)^d-1}{K-2}-d\Big]\Big/\binom{n}{2}\\&=\frac{nK-2n+2}{(K-2)(n-1)}d-\frac{K[(K-1)^d-1]}{(K-2)^2(n-1)}\end{aligned}$$

等号仅当 $g(G)\geqslant 2d-1$时成立。 定理证毕。

2 若干说明

(1) 对于给定直径 d 的 n 阶 K 正则连通图，定理1不仅给出了其平均距离的下界，而且

说明了达到这一下界的图类特征（满足 $g\geqslant 2d-1$）。从而（*）式中取等号可作为这类图平均距离计算式。更表明了：在直径为 d 的 n 阶 K 正则连通图中，围长 $g\geqslant 2d-1$ 的图具有最小平均距离。

(2)对于直径为 d 的 n 阶连通图 G，且 $\Delta(G)=K$，则定理1中(*)式仍然是成立的。且当且仅当 G 为 K 正则图，且满足 $g(G)\geqslant 2d-1$ 时等号才成立。

参 考 文 献

〔1〕 F.哈拉里.图论.上海:上海科技出版社,1980

〔2〕 施容华.连通图的平均距离.科学通报.1990;10:798

〔3〕 何文杰等.链状正则图的平均距离.应用数学,1991;4:28～34

The Diameter and Average Distance in a Regular Graph

Xu Baogen

ABSTRACT

This article discusses mainly the relation of the diameter and average distance in a regular graph.

Let G be a regular Graph, with $g(G)\geqslant 2d(G)-1$. We give the calculated formula of average distance of graph G.

Key words: Regular graph; Diameter; Girth; Average distance