

大位移接触摩擦单元在工程设计中的应用

雷 晓 燕

(建筑工程系)

摘 要

一种新的大位移接触摩擦单元采用点-面接触方式,能够模拟大位移情况下两物体间的张开、闭合和摩擦滑动。单元的基本未知量包括节点位移和接触应力。单元的几何和静力约束是作为补充方程包含在接触摩擦单元的刚度方程中。基于增量形式的有限元法,本文建立了大位移接触问题的等效单元刚度矩阵和荷载向量,使之与常规的有限元一样,可在单元水平上进行刚度和荷载的迭加。因而具有算法简单的优点。

关键词: 大位移; 接触摩擦; 有限元

0 引 言

接触摩擦是工程中最常见和最重要的问题之一。许多研究人员致力于这一领域的工作。早期的研究集中在小位移问题方面,采用的是点-点接触模型,如节理单元、接触单元,罚函数法和拉格朗日法^[1-4]。点-点接触模型算法简单,但在应用上有局限性,不适宜大变形情况。

近年来,随着计算机技术的发展,分析各种复杂大位移接触摩擦问题已成为可能。目前,研究人员的重点是寻求有效算法。这方面早期的工作要数 Rother^[5]和 Hallquist^[6]。自那以后,该领域的研究十分活跃,已有一系列的研究成果问世^[7-9]。由于在大位移接触问题中,点-点接触模型不再适用,需要考虑接触运动。大位移问题中的接触条件是很复杂的,以致于出现了各种各样的理论。目前的理论大多过于复杂,不便于实际应用。本文在文 [1] 的基础上,采用点-面接触模型,提出了一种新的大位移接触摩擦单元。运用这一模型求解问题时,首先使接触界面上的单元网格点对应。随着荷载的增加,变形越来越大。在这一过程中,点-点接触变成了点-面接触,单元必须采用更新的位形。

接触摩擦单元定义于图 1。单元未知量包括节点位移和接触应力。单元的几何和静力约束条件是作为补充方程包含在接触摩擦单元的刚度方程中。由此建立了大位移接触问题的等效单元刚度矩阵和荷载向量,可以用常规的方法将接触摩擦单元的贡献迭加到总体有限元方程中。

本文于 1993 年 11 月 2 日收到

1 接触摩擦单元理论

在大位移问题中,物体的平衡方程必须建立在当前的位形中。为此,在数值计算时需要采用增量算法。

考察两物体 A 和 B 的接触, A、B 区域采用普通有限元,接触界面采用接触元。接触初始时,节点对应。整个问题的描述采用笛卡尔坐标系 x, y , 局部坐标系 n, s 则用于描述接触摩擦元。

在接触摩擦分析中,随着外荷载的逐渐增加,变形也越来越大,接触摩擦单元节点对由初始时的点-点接触变成了点-面接触,如图 2 所示。这时,单元的位形 1-2-3-4-5-6 必须用新的位形 1-2-3-4'-5'-6' 更新。

在更新的位形中,运用虚位移原理则有

$$\delta \underline{a}'^T \underline{F}' = \int_r (\delta \underline{A})^T \underline{\Sigma} d\Gamma. \tag{1}$$

其中 \underline{a}' 为更新位形中整体坐标系下增量节点位移矢量

$$\underline{a}' = \{a_1, a'_1\}^T,$$

\underline{F}' 为更新位形中整体坐标系下增量等效节点力矢量

$$\underline{F}' = \{F_1, F'_1\}^T,$$

\underline{A} 为更新位形中局部坐标系下单元内增量相对位移

$$\underline{A} = \{\Delta u, \Delta v\}^T,$$

$\underline{\Sigma}$ 为更新位形中局部坐标系下单元内的接触应力

$$\underline{\Sigma} = \{\sigma, \tau\}^T.$$

引入插值函数矩阵 N , 节点 4、5、6 的位移可以近似用节点 4'、5'、6' 的位移表示成

$$u_i = N_1 u'_4 + N_2 u'_5 + N_3 u'_6,$$

$$v_i = N_1 v'_4 + N_2 v'_5 + N_3 v'_6,$$

(2)

或
$$\underline{a}_1 = \underline{H} \underline{a}'_1, \quad \underline{a}'_1 = \underline{H}^{-1} \underline{a}_1, \tag{3}$$

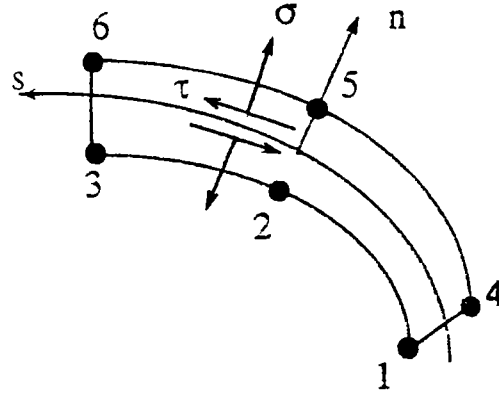


图 1 接触摩擦单元

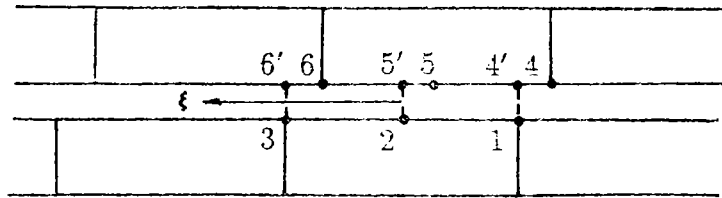


图 2 点-面接触时的情形

其中
$$\underline{H} = \{\underline{H}_1 \quad \underline{H}_2 \quad \underline{H}_3\}^T, \quad (4)$$

$$\underline{H}_i^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}_\xi, \quad (5)$$

由此可将 \underline{a}' 写成
$$\underline{a}' = \underline{M} \underline{a}, \quad (6)$$

其中 \underline{a} 为前次位形中整体坐标系下增量节点位移矢量; \underline{M} 为转换矩阵

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}^{-1} \end{bmatrix}.$$

同样有
$$\underline{F}' = \underline{M} \underline{F}, \quad (7)$$

其中 \underline{F} 为前次位形中整体坐标系下增量等效节点力矢量。

单元内任一点的相对位移可用节点相对位移表示为

$$\underline{A} = \underline{N} \Delta \underline{a}, \quad (8)$$

其中 $\Delta \underline{a}$ 为更新位形中局部坐标系下增量节点相对位移矢量。

单元内任一点的接触应力可用节点接触应力表示为

$$\underline{\Sigma} = \underline{N} \underline{\sigma}, \quad (9)$$

其中 $\underline{\sigma}$ 为更新位形中局部坐标系下节点接触应力矢量。

局部坐标系中增量节点相对位移与整体坐标系中增量节点位移之间的关系为

$$\Delta \underline{a} = \underline{C} \underline{a}', \quad (10)$$

其中 \underline{C} 为坐标转换矩阵,

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} -\underline{L}_1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{L}_2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & -\underline{L}_3 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}_3 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

上式中

$$\underline{L}_i = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

ϕ_i 为更新位形中整体坐标轴 x 与局部坐标轴 n 之间的夹角。

将 (6) ~ (9) 四式代入 (1) 中, 得到

$$\underline{M}^{-1} \underline{C}^T \underline{S} \underline{\sigma} = \underline{F}, \quad (12)$$

其中

$$\underline{S} = \int_r \underline{N}^T \underline{N} d\Gamma. \quad (13)$$

积分是在当前位形中。

2 几何和静力约束条件

对二维问题, 接触条件可分为三类, 即固定、滑动和张开。对不同的接触状态, 接触面上的位移和应力应满足不同的平衡方程和连续条件。

接触摩擦单元的几何和静力约束方程可统一表示成

$$\{\underline{C} \quad \underline{R}\} \begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{\sigma} \end{Bmatrix} = \underline{a}^* \quad (14)$$

其中 \underline{C} 为转换矩阵, \underline{R} 为对角矩阵, \underline{a}^* 为给定的节点相对位移或节点接触应力矢量, 其值由表 2 确定。

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} -\underline{L}_1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{L}_2 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & -\underline{L}_3 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}_3 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{R}_1 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{R}_2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{R}_3 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

上两式中的子矩阵 \underline{L}_i 和 \underline{R}_i 与节点对之间的接触状态有关。

假设节点对 (1, 4') 处于固定状态, (2, 5') 处于滑动状态, (3, 6') 处于自由状态, 这时 (15)、(16) 两式中的子矩阵 \underline{L}_i 和 \underline{R}_i 具有如下形式

$$\underline{L}_1 = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\underline{L}_2 = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\underline{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\underline{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\underline{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

给定的节点相对位移和节点接触应力具有如下形式

$$\underline{a}^* = \{\Delta u_1^* \quad \Delta v_1^* \quad \Delta u_2^* \quad T_2 \quad N_3 \quad T_3\}^T. \quad (23)$$

其中, Δu_i^* , Δv_i^* , N_i , T_i 与上一荷载步节点对所处的接触状态有关, 其值由表 2 确定。

3 等效单元刚度-约束矩阵和荷载向量

上两节分别建立了节点接触应力和节点荷载之间的关系 (12) 及约束方程 (14)。将两式合写在一起, 则有

$$\begin{bmatrix} 0 & M^{-1}C^T S \\ C^T M & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ \underline{a}^* \end{Bmatrix} \quad (24)$$

通过形成如下所示的刚度-约束矩阵 \underline{K}_c 和荷载矢量 \underline{f}_c ，这种新单元可以在单元水平上进行刚度和荷载的组装。

$$\underline{K}_c = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}C^T S \\ C^T M & R \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\underline{f}_c = \begin{Bmatrix} 0 \\ \underline{a}^* \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

(25)、(26) 两式分别被称为等效单元刚度-约束矩阵和荷载向量，可用标准的有限元集成规则迭加到总刚度矩阵和总荷载向量中。

4 接触算法

接触摩擦问题需经多次迭代才能获得正确解。计算时，首先假设单元处于某种接触状态（固定、滑动和张开），按照假定的状态，分别计算等效单元刚度矩阵和荷载向量。解有限元方程后，得到一组试验解。将试验解进行接触状态检查，看其是否与原假设状态相同，若相同，说明原假设接触状态正确，相应的解即为正确解，计算结束。若不同，则选取试验解为新的假设状态，并修改荷载向量，进行新一轮迭代，直至收敛。

现给出主要计算步骤。假设在荷载步 K ，已进行了第 $(i-1)$ 次迭代，相应的位移和应力 \underline{a}_{i-1}^k ， $\underline{\sigma}_{i-1}^k$ 已经求得，现考察第 i 次迭代的情况：

步骤 1 假设第 $(i-1)$ 次迭代时求得的接触状态为正确状态，按 (25) 式计算等效单元刚度-约束矩阵；

步骤 2 根据假设的接触状态，根据表 2 按 (26) 式形成等效单元荷载向量；

步骤 3 将等效单元刚度-约束矩阵和荷载向量分别迭加到总刚度矩阵和总荷载向量中；

步骤 4 求解有限元方程，得到增量位移 \underline{a} 和增量应力 $\underline{\sigma}$ ；

步骤 5 计算总位移和总应力。

$$\begin{aligned} \underline{a}_i^k &= \underline{a}_{i-1}^k + \underline{a} \\ \underline{\sigma}_i^k &= \underline{\sigma}_{i-1}^k + \underline{\sigma} \end{aligned}$$

步骤 6 按表 1 对每一节点对选择新的接触状态；

步骤 7 检查新的接触状态是否与原假设相同，若相同，判别计算是否收敛。若收敛，计算结束，转新的荷载增量步；否则，转步骤 1，进行新的下一轮迭代。

表 1 给出了各个荷载步中每次迭代进行接触状态检查的判据，表 2 为给定的约束荷载向量。

本文采用了最大拉应力和 Mohr-Coulomb 剪切滑动准则，即

$$\sigma \leq [\sigma] \quad \tau \leq C - \sigma \tan \phi \quad (27)$$

其中 C 为粘性系数， ϕ 为内摩擦角。

表1 接触状态判别表

迭代步 (i)	固	定	滑	动	张	开
($i-1$)	$\sigma < [\sigma]$		$\sigma < [\sigma]$			
固	$\tau < [\tau]$		$\tau > [\tau]$		$\sigma > [\sigma]$	
滑	$\sigma < [\sigma]$		$\sigma < [\sigma]$		$\sigma > [\sigma]$	
	$\Delta v' [\tau] < 0$		$\Delta v' [\tau] > 0$			
张	$\Delta u' + g < 0$		/		$\Delta u' + g > 0$	

表2 给定的约束荷载向量 a

荷载步 (k)	固	定	滑	动	张	开
($k-1$)	$\Delta u^* = 0$		$\Delta u^* = 0$		$N = -\sigma^{k-1}$	
固	$\Delta v^* = 0$		$T = [\tau]^k - \tau^{k-1}$		$T = -\tau^{k-1}$	
滑	$\Delta u^* = 0$		$\Delta u^* = 0$		$N = -\sigma^{k-1}$	
	$\Delta v^* = 0$		$T = [\tau]^k - \tau^{k-1}$		$T = -\tau^{k-1}$	
	$\Delta u^* = -(\Delta u')^{k-1}$		$\Delta u^* = -(\Delta u')^{k-1}$		$N = 0$	
张	$\Delta v^* = \Delta v' \left \frac{\Delta u^*}{\Delta u'} \right $		$T = [\tau]^k$		$T = 0$	

表中 $[\sigma]$, $[\tau]$ 分别为法线和切线方向的最大容许应力; g 为物体间的初始裂缝。

5 几个问题

5.1 从整体坐标计算局部坐标 ξ_i

为了形成矩阵 H , 见式 (4)、(5), 需要计算 ξ_i 。 ξ_i 可以利用接触面上的正交条件建立补充方程而求得。如图 3 所示, 沿接触面上切线方向的单位矢量为

$$\vec{e} = x_i \vec{i} + Y_i \vec{j}, \quad (28)$$

其中:

$$x_i = \left(\frac{dx}{Jd\xi} \right)_{\xi=\xi_i}, \quad y_i = \left(\frac{dy}{Jd\xi} \right)_{\xi=\xi_i},$$

利用正交条件:

$$(\vec{x}_k - \vec{x}_i) \cdot \vec{e} = 0, \quad (29)$$

或

$$(x_k - x_i)x_i + (y_k - y_i)y_i = 0, \quad (30)$$

其中

$$x_i = \sum N_i(\xi_i)x_i, \quad y_i = \sum N_i(\xi_i)y_i.$$

$$\text{定义 } f(\xi) = (x_k - x_i)x_i + (y_k - y_i)y_i. \quad (31)$$

问题归结为寻找 ξ , 使

$$f(\xi_j) = 0, \quad (32)$$

利用 Newton 法, 可以建立计算 ξ 的迭代公式如下

$$\xi_j = \xi_{j-1} - \frac{f(\xi_{j-1})}{(df/d\xi)_{\xi_{j-1}}}, \quad (33)$$

计算表明, 上述算法一般只需经 2—3 次迭代即可收敛。

5.2 普通单元大位移情况下的有限元方程

当接触元考虑大变形情况时, 与之相连的普通单元也必须考虑几何非线性效应。几何非线性问题的有限元解法在许多文献中都有介绍, 参见 [10]。现简要给出迭代过程中的主要计算步骤。

假设在荷载步 K , 已进行了第 $(i-1)$ 次迭代, 现考察第 i 次迭代的情况:

(1) 计算残余力 ψ_{i-1}

$$\psi_{i-1} = \underline{f}^k - \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{\sigma}_{i-1}^k d\Omega.$$

其中 \underline{f}^k 为荷载步 k 时的总荷载, \underline{B} 为考虑几何非线性效应的应变位移矩阵 [10], $\underline{\sigma}_{i-1}^k$ 为上一迭代步中得到的 Piola-Kirchoff 应力, 积分是在前次位形中进行的。

(2) 求解增量位移 $\Delta \underline{a}_{i-1}$

$$\underline{k}^* \Delta \underline{a}_{i-1} = \psi_{i-1}.$$

其中 \underline{k}^* 为考虑几何非线性效应的刚度矩阵。

(3) 计算总位移总应力

$$\underline{a}_i^k = \underline{a}_{i-1}^k + \Delta \underline{a}_{i-1},$$

$$\underline{\sigma}_i^k = \underline{\sigma}_{i-1}^k + \Delta \underline{\sigma}_{i-1}.$$

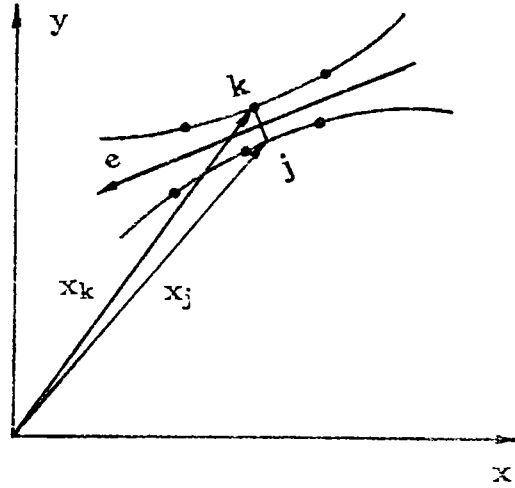


图 3 接触摩擦单元的正交条件

6 算 例

现考察两悬臂梁的接触情况, 如图 4 所示。两悬臂梁互相重叠, 每个悬臂用 20 个三角形六节点单元划分网格。接触面布置 10 个接触元。梁的一端作用有 $P = 2000\text{KN}$ 的集中力。材料系数取为 $E = 30 \times 10^6 \text{KN/m}^2$, $\nu = 0.25$, $\phi = 0$, $C = 100 \text{KN/m}^2$, $[\sigma] = 5000 \text{KN/m}^2$ 。

计算结果表示在图 5 和图 6 中, 其中图 5 为网格变形图, 图 6 为悬臂梁底层的竖向位移, 图中曲线 1 为本文数值解, 曲线 2 为小位移接触摩擦分析结果 [1]。从中可见, 小位移分析结果略小于大位移的计算。当两悬臂梁之间不存在张开和滑动现象时, 即始终保持固定状态, 本文的计算与几何非线性有限元分析的结果是完全一致的。

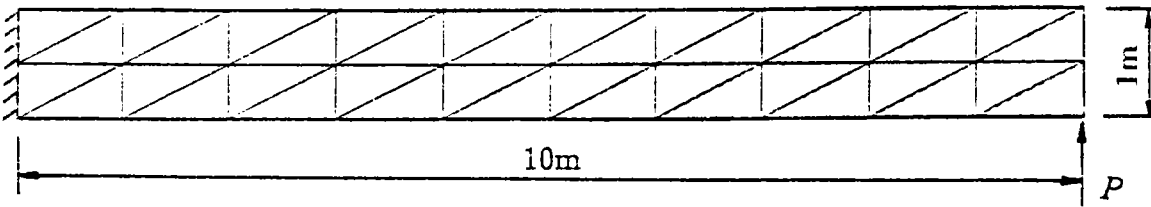


图4 受集中力作用的双层悬臂梁

($P = 2000KN$)

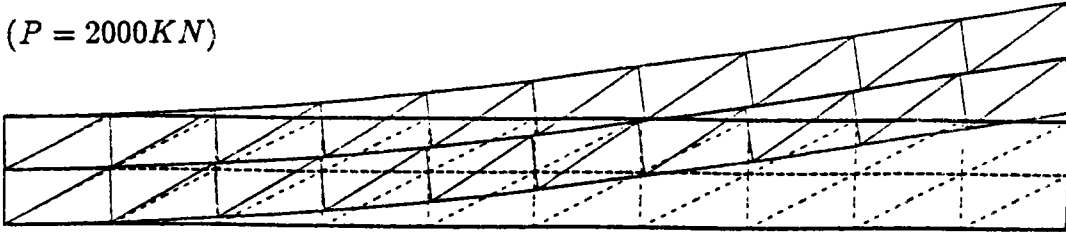


图5 悬臂梁的网格变形图

Displacement Y of composite cantilever beam
 1: node-segment contact 2: node-node contact
 ($P=2000KN$)

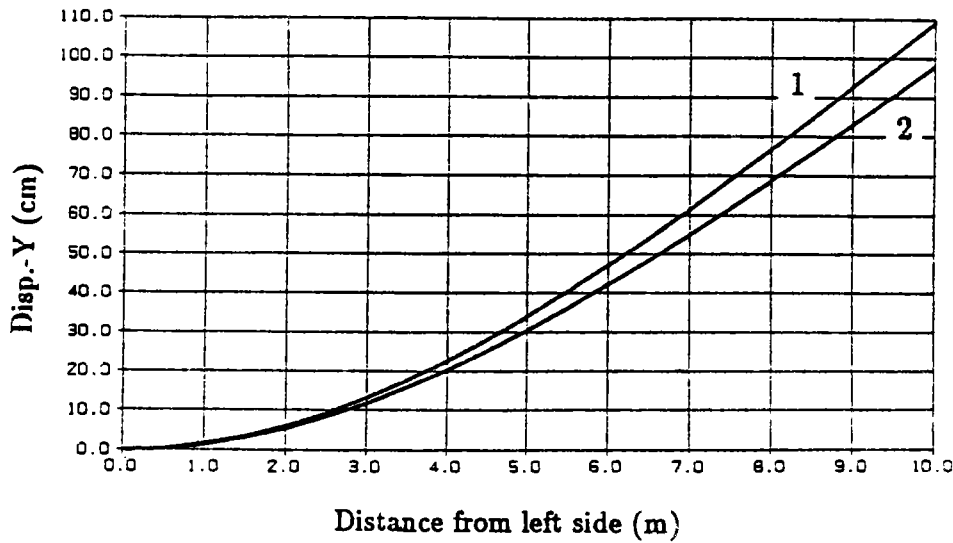


图6 底层悬臂梁的竖向位移

参 考 文 献

- [1] G. Swoboda and Lei Xiaoyan. simulation of tunnel excavation with contact friction interface element. Proceedings of International symposium on Application of Computer Methods in Rock Mechanics and Engineering. Xian. China. May. 24—28 (1993)
- [2] Goodman. R. E., Taylor. R. L., and Brekke. T. L. A model for the mechanics of jointed rock. J. Soil Mech. Dn. A. S. C. E., 94. SM3. (1968)
- [3] Michael G. Katona. A simple contact—friction interface element with applications to buried culverts. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., Vol. 7. 371—384. (1983)
- [4] Noriaki Okamoto and Masaru Nakazawa. Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 14. 337—357. (1979)
- [5] H. Rothert. H. Idelberger. W. Jacobi and L. Niemann. On geometrically nonlinear contact problems with friction. Computer methods in applied mechanics and engineering 51. 139—155. (1985)
- [6] J. O. Hallpuist. G. L. Goudreau and D. J. Benson. sliding interfaces with contact—impact in largescale Lagrangian computations. Computer methods in applied mechanics and engineering 51. 107—137. (1985)
- [7] J. C. Simp. P. Wriggers. K. H. Schweizerhof and R. L. Taylor. Finite deformation post—buckling analysis involving inelasticity and contact constraints. Computer methods in applied mechanics and engineering 23. 779—800. (1986)
- [8] H. Parisch. A consistent tangent stiffness matrix for three dimensional non—linear contact analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 28. 1803—1812. (1989)
- [9] A. R. Johnson & C. J. Quigley. Frictionless geometrically nonlinear contact using quadratic programming. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 28. 127—144. (1980)
- [10] D. R. J. Owen & E. Hinton. Finite elements in plasticity: Theory and practice. Prineridge Press Limited Swansea. U. K. (1980)

Application of Large Scale Contact Friction

Interface Element in Engineering Design

Lei Xiaoyan

ABSTRACT

A simple contact friction interface element for large displacement problem is developed. This element considering node to segment contact can simulate frictional slippage, separation, and re-bonding of two bodies with large movement. The primary unknowns for this element include nodal displacements and contact stresses. The geometrical and statical constraints are taken as additional conditions which are included in stiffness equation of contact friction interface element. Based on the incremental finite element method, the equivalent element stiffness-constraint matrix and load vector are obtained which, as the same as standard finite element, can be easily incorporated in the element level. Therefore the element has the advantage of algorithms simplicity.

Key words: Large displacement; Non-linear contact; Finite element