第12卷 第1期 华东交通大学学报 Vol. 12 No. 1
1995年 3月 Journal of East China Jiaotong University Mar. 1995

一类非完整保守力学系统的变分方程的特解

张 毅

（苏州城建环保学院）

摘 要 对于广义约束反力有势的非完整保守力学系统，本文给出了其变分方程，研究了它们的解，并证明可利用已知第一积分来得到变分方程的特解．最后，举例说明其应用．

关键词 分析力学；非完整保守力学系统；第一积分；变分方程

分类号 O316

0 引 言

对于完整保守力学系统，Whittaker 研究了利用已知第一积分求变分方程的特解问题[1]．对于非完整力学系统，由于动力学方程一般不具有完整保守力学系统那样的对称形式，因此，讨论起来就十分困难．1991 年，梅凤翔[2]证明了在一定条件下，非完整系统变分方程的特解也可由已知的第一积分来得到．本文研究一类特殊的非完整保守力学系统，它可以通过构造新的 Lagrange 函数的方法使系统的动力学方程 Lagrange 化，从而无需附加任何条件即可利用已知第一积分来得到系统的变分方程的特解．文末，举一例以说明结果的应用．

1 非完整保守力学系统的正则方程及其变分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 确定，系统受有 g 个理想的一阶非线性非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0,\qquad (\beta=1,2,\cdots,g;s=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

系统的运动方程可表为 Routh 形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s},(s=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

令

$$\Lambda_s=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s},(s=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

收稿日期：1994－05－26． 张毅，男，1964 年生，副教授．

中国知网 https://www.cnki.net

这里 Λ_s 就是系统的广义约束反力[3]．利用式(1)、(2)可在运动微分方程积分之前，求出 λ_β 作为 q、$\dot{q}$、t 的函数[3]，从而由(3)可知 Λ_s 为 q、$\dot{q}$、t 的函数．方程(2)可作为某个完整系统来研究，此完整系统 n 个自由度，其动能为 T，广义力为 $Q_s+\Lambda_s$，其中非完整约束(1)是方程(2)的特殊的第一积分[3~5]．

若广义约束反力有势，即成立[3]

$$\Lambda_s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial u}{\partial q_s}. \tag{4}$$

设作用于系统上的主动力 Q_s 是有势的，则方程(2)可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L'}{\partial q_s} = 0. \tag{5}$$

其中 $L'=T-V+U$ 称为系统的广义 Lagrange 函数

引进广义动量及 Hamilton 函数为

$$p_s' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s}, \tag{6}$$

$$H' = \sum_{s=1}^{n} p_s'\dot{q}_s - L', \tag{7}$$

则(5)式可表示为正则形式[6]

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H'}{\partial p_s'}, \quad \dot{p}_s' = -\frac{\partial H'}{\partial q_s}. (s=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

方程(8)就是非完整保守力学系统，当广义约束反力有势时，相应完整力学系统运动的正则方程．在求解非完整系统(1)、(2)式的运动时，可先积分相应完整系统(8)，然后再施加非完整约束(1)对初始条件的限制．

在方程(8)中，用 $q_s+\delta q_s$ 替代 q_s，用 $p_s'+\delta p_s'$ 替代 p_s'，并忽略 δq_s、$\delta p_s'$ 的二阶以上高阶微量，则容易得到

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_s = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H'}{\partial p_s'\partial q_k}\delta q_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H'}{\partial p_s'\partial p_k'}\delta p_k', \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta p_s' = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H'}{\partial q_s\partial q_k}\delta q_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H'}{\partial q_s\partial p_k'}\delta p_k', \\ &(s=1,2,\cdots,n). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

方程(9)称为广义约束反力有势的非完整保守力学系统的变分方程．

2　非完整保守力学系统的第一积分与变分方程的特解

设所论非完整保守力学系统有一个第一积分，形如

$$\varphi(q_s, p_s', t) = \mathrm{const.}, \tag{10}$$

将(10)对时间 t 求导数，并利用(8)，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial H'}{\partial p_k'} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k'}\cdot\left(-\frac{\partial H'}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

中国知网　https://www.cnki.net

用 Poisson 括号[6]，上式表示为

$$(\varphi, H') + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial p_r'}\left[(\varphi, H') + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] = 0, \quad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_r}\left[(\varphi, H') + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] = 0, \quad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{14}$$

利用(13)、(14)，我们容易证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_r'}\right) = \left(\frac{\partial H'}{\partial p_r'}, \varphi\right), \quad (r = 1, 2, \cdots, n). \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}\right) = \left(\frac{\partial H'}{\partial q_r}, \varphi\right), \quad (r = 1, 2, \cdots, n). \tag{16}$$

关系(15)、(16)就是关于所论系统的第一积分的两组重要关系．

现在我们来求变分方程(9)的解，假设方程(9)有如下形式的解

$$\left.\begin{aligned} \delta q_s &= \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial p_s'} + \varepsilon A_s(q, p', t), \\ \delta p_s' &= -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial q_s} + \varepsilon B_s(q, p', t), \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中 ε 为一小常数．将(17)代入(9)，并利用(15)，(16)，可以得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A_s}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H'}{\partial p_s'\partial q_k}A_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H'}{\partial p_s'\partial p_k'}B_k, \\ \frac{\mathrm{d}B_s}{\mathrm{d}t} &= -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H'}{\partial q_s\partial q_k}A_k - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H'}{\partial q_s\partial p_k'}B_k, \\ &(s = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

方程(18)就是为确定 A_s、B_s $(s=1,2,\cdots,n)$的方程．如能从中解得 A_s、B_s，便可求出变分方程(9)的形如(17)的解．当然，求方程(18)的通解，一般说来是十分困难的．但是，显然方程(18)有特解 $A_s=B_s=0$ $(s=1,2,\cdots,n)$，而(17)成为

$$\delta q_s = \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial p_s'}, \qquad \delta p_s' = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial q_s}. \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{19}$$

于是，我们得到如下定理．

定理　如果非完整保守力学系统的广义约束反力有势，则非完整保守力学系统变分方程(9)的特解可通过其第一积分 Φ 由(19)给出．

3　说明性算例

例[6,7]　设力学系统的位形由两个广义坐标 q_1、q_2 确定，系统的动能和势能分别为

中国知网 https://www.cnki.net

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),V=0. \tag{20}$$

系统的运动受有非完整约束

$$f=\dot{q}_1^2+at\dot{q}_2^2-aq_2+t=0. \quad (a\ 为常数) \tag{21}$$

系统的 Routh 方程为

$$\begin{cases}\ddot{q}_1=\lambda,\\ \ddot{q}_2=\lambda at,\end{cases} \tag{22}$$

将(21)对时间 t 求导数，得

$$\ddot{q}_1+at\ddot{q}_2+1=0. \tag{23}$$

将(22)代入(23)，解得

$$\lambda=-\frac{1}{1+a^2t^2}. \tag{24}$$

于是，运动方程(22)可以表为

$$\begin{cases}\ddot{q}_1=-\dfrac{1}{1+a^2t^2},\\ \ddot{q}_2=-\dfrac{at}{1+a^2t^2}.\end{cases} \tag{25}$$

如取系统的广义 Lagrange 函数为

$$L'=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{a}\dot{q}_1\mathrm{arctg}\ at+\frac{1}{2a}\dot{q}_2\ln(1+a^2t^2). \tag{26}$$

则(25)可定成 Lagrange 形式(5)，即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L'}{\partial\dot{q}_1}-\dfrac{\partial L'}{\partial q_1}=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L'}{\partial\dot{q}_2}-\dfrac{\partial L'}{\partial q_2}=0,\end{cases} \tag{27}$$

引入广义动量为

$$\begin{cases}P_1'=\dfrac{\partial L'}{\partial\dot{q}_1}=\dot{q}_1+\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\ at\\ P_2'=\dfrac{\partial L'}{\partial\dot{q}_2}=\dot{q}_2+\dfrac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)\end{cases} \tag{28}$$

于是，Hamilton 函数为

$$H'=\sum_{i=1}^{2}p_i'\dot{q}_i-L'=\frac{1}{2}(p_1'-\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\ at)^2+\frac{1}{2}[p_2'-\frac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2)]^2. \tag{29}$$

正则方程(8)可表为

$$\begin{cases}\dot{q}_1=p_1'-\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\ at,\\ \dot{q}_2=p_2'-\dfrac{1}{2a}\ln(1+a^2t^2),\\ \dot{p}_1'=0,\\ \dot{p}_2'=0.\end{cases} \tag{30}$$

中国知网 https://www.cnki.net

系统的变分方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_1)=\delta p_1{}',\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_2)=\delta p_2{}',\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta p_1{}')=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta p_2{}')=0.\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

显然，本问题有一个第一积分　$\varphi=p_1{}'=\mathrm{const.}$，　(32)

则由本文定理，变分方程有特解

$$\left.\begin{aligned}&\delta q_1=\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial p_1{}'}=\varepsilon,\quad \delta q_2=\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial p_2{}'}=0,\\&\delta p_1{}'=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}=0,\quad \delta p_2{}'=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}=0.\end{aligned}\right\}\tag{33}$$

这就是本问题的变分方程(31)对应于第一积分(32)的特解．

参 考 文 献

[1] Whittaker E T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Fourth Edition. Cambridge, 1952

[2] 梅凤翔．非完整系统的第一积分与其变分方程特解的联系．力学学报，1991，23(3)：366～370

[3] 梅凤翔．非完整系统力学基础．北京：北京工业学院出版社，1985，88～101，336～342

[4] 梅凤翔．非完整系统的第一积分与积分不变量．科学通报，1991，36(11)：815～818

[5] 梅凤翔．非完整系统力学积分方法的某些进展．力学进展，1991，21(1)：83～95

[6] 梅凤翔，刘端，罗勇．高等分析力学．北京：北京理工大学出版社，1991，458～467

[7] 张毅．一类非完整保守力学系统的高阶积分不变量．苏州城建环保学院学报，1994，7(1)：16～20

A Particular Solution of the Variational Equations for a Type of Nonholonomic Conservative Mechanical Systems

Zhang Yi

Abstract　In this paper, the variational equations for a type of nonholonomic conservative mechanical systems in which the generalized constrained forces are potential is presented. The solution of the variational equations of the systems is studied, and it is proved that a particular solution of the variational equations can be obtained by using a known first integral. Finally, one example is given to illustrate the application of the results.

Key words　Anlytical mechanics; Nonholonomic conservative mechanical system; First integral; Variational equation

中国知网　https://www.cnki.net