

设线弹簧模型上,有  $n$  个广义力  $P_1, P_2, \dots, P_n$  作用,如图 1 所示. 荷载  $P_i$  作用点处与  $P_i$  相应的广义位移用  $u_i$  表示. 根据叠加原理,线弹簧上的位移与荷载关系,可表示为

$$u_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} P_j \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1)$$

另外,由位移互等定理有

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$$

这里影响系数  $\lambda_{ij}$  (或  $\lambda_{ji}$ ) 为线弹簧的柔度. 它们取决于裂纹体的几何形状和裂纹尺寸的大小. 其中,  $\lambda_{ii}$  为关于荷载  $P_i$  与其相应的广义位移  $u_i$  的线弹簧柔度;

$\lambda_{ji}$  或  $\lambda_{ij}$  为关于荷载  $P_i$  与相应于其他荷载  $P_j$  的广义位移  $u_i$  的柔度.  $\lambda_{ii}$  称为自相关柔度;  $\lambda_{ij}$  或  $\lambda_{ji}$  称为他相关柔度.

此时,线弹簧内储存的变形能为

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i u_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i P_j \lambda_{ij} \quad (2)$$

假定裂纹沿着裂纹尖端方向扩展微面积  $dA$  (裂纹扩展长度与裂纹体厚度之积),那么,引起的线弹簧位移变化(韧带宽度减少)为

$$du_i = \sum_{j=1}^n (P_j d\lambda_{ij} + \lambda_{ij} dP_j) \quad (3)$$

相应地,线弹簧中所储存的变形能改变量(减少),可由式(2)微分得到

$$dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (P_i P_j d\lambda_{ij} + \lambda_{ij} P_i dP_j + \lambda_{ij} P_j dP_i) \quad (4)$$

裂纹扩展  $dA$  时,线弹簧所释放出的能量为外力所做的功与储存变形能的改变量之代数和,即

$$d\bar{U} = \sum_{i=1}^n P_i du_i - dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i P_j d\lambda_{ij} \quad (5)$$

又由文献[7]知,裂纹扩展  $dA$  所需要的能量与裂纹尖端附近应力强度因子有关,即

$$dU = \left[ \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \right] dA \quad (6)$$

这里  $K_I$ 、 $K_{II}$ 、 $K_{III}$  分别为 I 型、II 型、III 型应力强度因子;  $\nu$  为 Poisson 比,裂纹尖端为平面应力状态时,  $\nu$  取为零;  $E$  是 Young 氏模量,  $G$  为剪变模量.

令式(5)和式(6)相等,则有

$$dU = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i P_j d\lambda_{ij} = \left[ \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \right] dA \quad (7)$$

因此,裂纹扩展  $dA$  时,线弹簧的能量释放率  $\bar{G}$  为

$$\bar{G} = \frac{dU}{dA} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i P_j \frac{d\lambda_{ij}}{dA} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (8)$$

当仅有单一荷载  $P$  或弯矩  $M$  作用 ( $n = 1$ ) 时,有  $K_{II} = K_{III} = 0$ ,则式(8)可简化为众所熟知的关系式

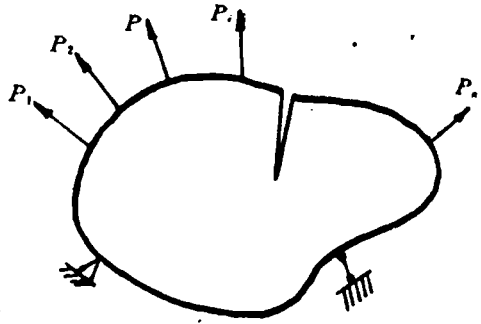


图 1

$$\bar{G} = \frac{P^2}{2} \frac{d\lambda}{dA} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{1i}^2 \quad (9)$$

$$\bar{G} = \frac{M^2}{2} \frac{d\lambda}{dA} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{1i}^2 \quad (10)$$

## 1.2 线弹簧柔度和应力强度因子的关系

由式(8),可得到线弹簧的柔度.假定在图1所示的线弹簧模型上仅有荷载  $P_i$  作用,裂纹尖端应力强度因子分别为  $K_{1i}, K_{1i}, K_{1i}$ ,则有

$$\frac{1}{2} P_i^2 \frac{d\lambda_{ii}}{dA} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{1i}^2 + K_{1i}^2) + \frac{1}{2G} K_{1i}^2 \quad (11)$$

同理,可得  $P_j (i=j)$  单独作用时,有

$$\frac{1}{2} P_j^2 \frac{d\lambda_{jj}}{dA} = \frac{1-\nu^2}{E} (K_{1j}^2 + K_{1j}^2) + \frac{1}{2G} K_{1j}^2 \quad (12)$$

当  $P_i$  和  $P_j$  同时作用时,裂纹尖端应力强度因子,根据叠加原理可分别为  $(K_{1i} + K_{1j})$ 、 $(K_{1i} + K_{1j})$  和  $(K_{1i} + K_{1j})$ ,于是,由式(8)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} P_i^2 \frac{d\lambda_{ii}}{dA} + P_i P_j \frac{d\lambda_{ij}}{dA} + \frac{1}{2} P_j^2 \frac{d\lambda_{jj}}{dA} = \\ & \frac{(1-\nu^2)}{E} [(K_{1i} + K_{1j})^2 + (K_{1i} + K_{1j})^2] + \frac{1}{2G} (K_{1i} + K_{1j})^2 \end{aligned} \quad (13)$$

将式(13)减去式(11)与式(12)之和,得到

$$\frac{1}{2} P_i P_j \frac{d\lambda_{ij}}{dA} = \frac{(1-\nu^2)}{E} [(K_{1i} K_{1j} + K_{1i} K_{1j})] + \frac{1}{2G} K_{1i} K_{1j} \quad (14)$$

式(14)为柔度和应力强度因子的最基本的关系式,当  $i=j$  时,即可得到式(11)或式(12).

对式(14)两边进行积分,即可得线弹簧柔度

$$\lambda_{ij} = \int d\lambda_{ij} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_0^A \frac{1}{P_i P_j} (K_{1i} K_{1j} + K_{1i} K_{1j}) dA + \frac{1}{2G} \int_0^A \frac{1}{P_i P_j} K_{1i} K_{1j} dA \quad (15)$$

## 1.3 几种简单的线弹簧模式及其柔度

表1列出了三种最为简单的线弹簧模式,此时,  $dA = bda$ .

表1 简单的线弹簧模式和应力强度因子

序号	线弹簧模式	应力强度因子
(a)		$\xi \leq 0.6 \quad K_{1P} = \frac{P \sqrt{a}}{bW} F_P(\xi)^{[8]}, \quad \xi = \frac{a}{W},$ $F_P(\xi) = 1.99 - 0.41\xi + 18.7\xi^2 - 38.48\xi^3 + 53.85\xi^4$
(b)		$\xi \leq 0.6 \quad K_{1M} = \frac{6M}{W^2 b} \sqrt{\pi a} F_M(\xi)^{[8]}, \quad \xi = \frac{a}{W},$ $F_M(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi} \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{2}} \frac{0.923 + 0.199[1 - \sin(\frac{\pi \xi}{2})]^3}{\cos(\frac{\pi \xi}{2})}$
(c)		$\xi < 1.0 \quad K_{1Q} = \frac{Q}{b \sqrt{W-a}} F_Q(\xi)^{[9]}, \quad \xi = \frac{a}{W},$ $F_Q(\xi) = 1.993\xi + 4.513\xi^2 - 9.54\xi^3 + 4.482\xi^4$

由式(15)和表1给定的值,可分别得到三种简单荷载作用下线弹簧的柔度

$$\lambda_{PP} = \frac{2b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{1P}}{P}\right)^2 da \quad (16)$$

$$\lambda_{MM} = \frac{2b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{1M}}{M}\right)^2 da \quad (17)$$

$$\lambda_{QQ} = \frac{2b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{1Q}}{Q}\right)^2 da \quad (18)$$

## 2 简单应用举例

本文通过两个简单实例,以说明线弹簧柔度的正确性.

**例1** 受轴向拉伸时含有中心穿透裂纹的无限长窄板条,如图2所示.

在裂纹处引入线弹簧模型,通过受力分析,其模式可看作是表1中(a)和(b)两种情况的组合.由式(1)知,线弹簧的位移有

$$u = \lambda_{PP}P + \lambda_{PM}M$$

$$\theta = \lambda_{MP}P + \lambda_{MM}M$$

该式与 Rice 和 Levy<sup>[1]</sup> 所得的结果完全一致.  $\lambda_{PP}$ 、 $\lambda_{MM}$  已分别由式(16)、(17)给出,  $\lambda_{PM} = \lambda_{MP}$  可由式(15)求得,即

$$\lambda_{PM} = \lambda_{MP} = \frac{2b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{1P}}{P} \cdot \frac{K_{1M}}{M}\right) da \quad (20)$$

**例2** 在集中力  $P$  和  $F$  作用下,含有裂纹的简支梁,如图3所示.

在裂纹处引入线弹簧模型后,其模式可看做是表1中的(a)、(b)和(c)三种情况的组合.同样,线弹簧模型位移可由式(1)得到

$$u = \lambda_{PP}P + \lambda_{PM}M + \lambda_{PQ}Q,$$

$$\theta = \lambda_{MM}M + \lambda_{MP}P + \lambda_{MQ}Q, \quad (21)$$

$$Y = \lambda_{QQ}Q + \lambda_{QP}P + \lambda_{QM}M,$$

式中  $\lambda_{PP}$ 、 $\lambda_{MM}$ 、 $\lambda_{QQ}$  已分别由式(16)、(17)和(18)给

出,  $\lambda_{PM} = \lambda_{MP}$  则由式(20)给出,由于  $K_{1P} = K_{1M}$

$= K_{1Q} = 0$ ,故显然有  $\lambda_{PQ} = \lambda_{QP} = 0$ ,  $\lambda_{MQ} = \lambda_{QM} = 0$ .因此,式(21)简化为

$$u = \lambda_{PP}P + \lambda_{PM}M,$$

$$\theta = \lambda_{MM}M + \lambda_{MP}P, \quad (22)$$

$$Y = \lambda_{QQ}Q.$$

若无轴向力即  $P = 0$ ,那么  $\lambda_{PP} = 0$ ,  $\lambda_{PM} = \lambda_{MP} = 0$ .则式(22)所简化的结果,与文献[5,6]所得的结果完全一致.

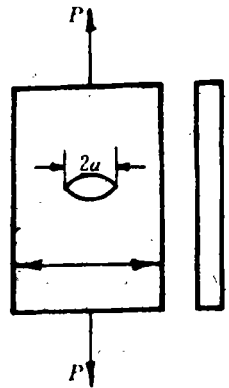


图2

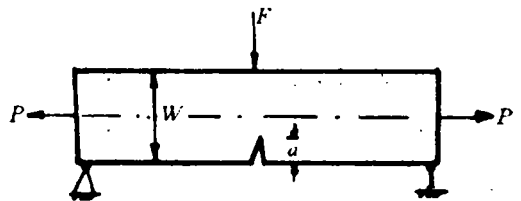


图3

### 3 裂纹尖端曲率半径或塑性区域对线弹簧柔度的影响

以上讨论的情况均是裂纹尖端曲率半径很小,但实际上裂纹尖端常常存在有限的曲率半径或塑性区域.为此,首先研究钝裂尖端曲率半径  $\rho$  对线弹簧柔度影响,然后论述塑性区的影响问题.

设图2所示的裂纹为椭圆形,其长轴为  $2a$ ,短轴为  $2c$ .由于椭圆孔的引入,导致势能减小,其值<sup>[10]</sup>为

$$(-\Delta\pi) = \frac{\pi(1-\nu^2)b}{E}(\sigma^2 a^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 ac) \quad (23)$$

另外,当引入椭圆孔后,柔度变化(韧带减小),即线弹簧柔度为  $\lambda$ ,那么,在荷载一定的情况下,势能的减小量又可表示为

$$(-\Delta\pi) = \frac{1}{2}P^2 \cdot \lambda \quad (24)$$

式中  $P = \sigma \cdot b \cdot W$ . 比较式(23)和式(24)得

$$\lambda = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{EbW^2} a^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{c}{a}\right) = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{EbW^2} a^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{a}}\right) = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{EbW^2} a_{eff}^2 \quad (25)$$

式中曲率半径  $\rho = \frac{c^2}{a}$ .

$$a_{eff} = a \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{a}}}$$

当  $\rho \ll a$  时,上式可近似表示为

$$a_{eff} \approx a \left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\rho}{a}}\right) \quad (26)$$

在线裂纹情况下,即  $c = 0$ ,则式(25)改变

$$\lambda = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{EbW^2} a^2 \quad (27)$$

若将含有裂纹无限大板应力强度因子  $K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$  代入到式(16),所得的结果与式(27)完全一致.由此,可以看出曲率半径为  $\rho$ ,长轴为  $2a$  的椭圆孔所引起的柔度变化与等效长度为  $2a_{eff}$  的线裂纹所引起的柔度变化相同.

对一般形状钝裂尖端曲率半径对柔度变化的影响,可以认为与椭圆孔的影响具有同等程度.因此,作为第一次近似, $a_{eff}$  可以表示为

$$a_{eff} = a \left(1 + \frac{e}{4} \sqrt{\frac{\rho}{a}}\right), \quad (28)$$

其中  $e$  为常数.

比较式(26)和式(27),当  $\rho$  与  $a$  相比充分小时,曲率半径  $\rho$  的影响不大.

现讨论裂纹尖端的塑性区域对线弹簧柔度的影响.根据文献<sup>[10]</sup>知,裂纹尖端的塑性区域尺寸与应力强度因子、屈服应力  $\sigma_s$  有关,即

$$R_p = \frac{1}{\pi} \frac{K_1^2}{\sigma_y^2}$$

由于在裂纹尖端存在塑性区所引起的柔度变化,小于去掉塑性区而形成的新裂纹所引起柔度变化,即塑性区对柔度变化的影响小于直接把  $R_p$  替换式(28)中的  $\rho$  计算所得到的柔度变化。另外,由于卸载和再加载过程中,最初所出现的塑性区域大部分呈弹性的。综上所述,当  $R_p \ll a$  时,也可认为塑性区对柔度变化影响非常小。

## 4 结束语

本文用能量原理和断裂力学理论导出了线弹簧模型在多种荷载作用下,其柔度与应力强度因子间的关系式,并列举了两个应用实例。最后,讨论了裂纹尖端曲率半径、塑性区域对柔度的影响,结果表明,曲率半径和塑性区尺寸在充分小的情况下,两者对柔度的影响均很小。

### 参 考 文 献

- 1 Rice J, Levy N. The Part-through Surface Crack in an Elastic Plate. *J. Appl. Mech.*, 1972, 39, 185~194
- 2 Parks D M. The Inelastic Line-Spring Estimate of Elastic-Plastic Fracture Mechanics Parameters for Surface-Cracked Plates and Shells. *ASME J. Press. Vessel Tech.*, 1981, 103, 245~254
- 3 King R B. Elastic-Plastic Analysis of Surface Flaws Using a Simplified Line-Spring Model. *Engng. Fract. Mech.*, 1983, 18, 217~231
- 4 Joseph P F, Erdogan F. A Note on the Mixed-mode Line Spring Model for shells. *ASME. J. Appl. Mech.*, 1991, 58, 1008~1091
- 5 Yokoyama J, Chen Mengcheng. An Approximate Analysis of Natural Frequency of a Cracked Beam. *APVC193*, Kitakyushu, Japan
- 6 Chen Mengcheng. An Approximate Analysis of Natural Frequency of a Cracked Hinged-hinged Beam. *Acta Solida Mechanica Sinica*, 1994, (4)
- 7 Paris P C, Sih G C. *ASTM SIP*, 1965, 381, 30
- 8 Tada H, Paris P C, Irwin G R. *The Stress Analysis of Crack Handbook*. Hellertown, Del Research Corp, PA, 1973
- 9 Tharp T M. A Finite Element for Cracked Beam Columns. *Int J. Numer. Methods Engng.*, 1987, 24, 1941~1950
- 10 杨秉宽,王幼复编译. 弹塑性断裂力学. 太原,山西人民出版社

## The Extension of Line-Spring Model in Fracture Mechanics

Hu Zonglin Chen Mengcheng

(Civil Engineering Department)

**Abstract** In this paper the extension of the original Line-Spring model is presented based on energy principles and fracture mechanics theories. From more than two kinds of loading is derived the relationship between compliance and stress intensity of the Line-Spring model. Besides the effects of curvature radius or plastic zone at the blunt crack tip on compliance changes are discussed.

**Key words** Line-Spring model; compliance; stress intensity