第 13 卷第 4 期　　华东交通大学学报　　Vol.13 No.4
1996 年 12 月　　Journal of East China Jiaotong University　　Dec. 1996

关于图的色数与反色数*

徐保根

(基础课部)

摘　要　证明了文献[1]中关于图的反色数的一个猜想,并探讨了图的反色数与色数的关系.

关键词　图;色数;反色数;独立数

分类号　O157.5

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号、术语同于文献[1,2].

定义 1[1]　对于图 $G(V, E)$,如果存在 V 的分析 $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$ 满足

(1)　$V_i\cap V_j=\varphi$　　$(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$

(2)　$E(G[V_i])=\varphi$　　$(1\leqslant i\leqslant n)$

(3)　$E(G[V_i\cup V_j])\neq\varphi$　　$(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$

则称 $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$ 为图 G 的一个 $n-$ 色分折.

定义 2[1]　对于任意图 G,图 G 的色数和反色数分别记为 $X(G)$ 和 $\overline{X}(G)$,其定义为:

$X(G)=\min\{n\mid$存在 G 的 $n-$色分折 $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i\}$,

$\overline{X}(G)=\max\{n\mid$存在 G 的 $n-$色分折 $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_i\}$.

定理 1　对于任意 P 阶简单图 G,均有 $\overline{X}(G)\leqslant P-\beta(G)+1$,其中 $\beta(G)$ 为 G 的(点)独立数.

证(反证法)　若 $\overline{X}(G)=m\geqslant P-\beta(G)+2$,则存在 $V(G)=V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m$ 为 G 的一个 $m-$色分折.令 S 表示图 G 的一个最大独立集,$|S|=\beta(G)$.

再令　$A_i=S\cap V_i$,　　$(i=1, 2, \cdots, m)$

　　　$B_i=V_i\setminus A_i$.　　$(i=1, 2, \cdots, m)$

显然　$\bigcup_{i=1}^{m}A_i=S$,$B_i\cap B_j=\varphi$　　$(1\leqslant i\neq j\leqslant m)$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m}B_i\right|=|V\setminus S|=P-\beta(G)\leqslant m-2.$$

收稿日期 1996－04－01.　　徐保根,男,1963 年生,讲师.

*　江西省自然科学基金资助课题

故在 m 个集合 B_1，B_2，…，B_m 中至少有两个是空集，不防设 $B_1 = B_2 = \varphi$ 因 $A_i \subseteq V_i$ $(i=1, 2)$，故 $V_1 = A_1$ 且 $V_2 = A_2$. 而 $A_1 \subseteq S$，$A_2 \subseteq S$，故 $V_1 \cup V_2 \subseteq S$，S 是 G 的独立集，$E(G[V_1 \cup V_2]) = \varphi$ 这与 $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ 为 G 的 $m-$色分折定义矛盾. 定理证毕.

上述定理是文献 [1] 中提出的猜想，我们证明了其正确性.

定理 2　对任意简单图 G，若 $|E(G)| = e$，则 $\overline{\chi}(G) \leqslant \frac{1+\sqrt{8e+1}}{2}$.

证　设 $\overline{\chi}(G) = m$，在 G 的 $m-$色分折中，任何两个色组之间至少有一条边，故 $e \geqslant \binom{m}{2}$，即 $m \leqslant \frac{1+\sqrt{8e+1}}{2}$. 证毕.

若 G_1 和 G_2 表示两个点不相交的图，用 $G_1 + G_2$ 表示其联图，即在 $G_1 \cup G_2$ 中将 G_1 的各顶点分别与 G_2 的每个顶点邻接所成的图.

定理 3　对于任意简单图 G_1 和 G_2，均有 $\overline{\chi}(G_1+G_2) = \overline{\chi}(G_1) + \overline{\chi}(G_2)$.

证　设 $\overline{\chi}(G_1) = m$，$\overline{\chi}(G_2) = n$，G_1 的一个 $m-$色分折与 G_2 的一个 $n-$色分折之并为 $G_1 + G_2$ 的 $(m+n)-$色分折，即 $\overline{\chi}(G_1+G_2) \geqslant m+n$. 反过来。$G_1 + G_2$ 的任意一个色分折中，每个色组中的全部点或者均在 G_1 中，或者均在 G_2 中，在 G_1 与 G_2 中的色组数目分别不超过 m 和 n. 即 $\overline{\chi}(G_1+G_2) \leqslant m+n$，因此，$\overline{\chi}(G_1+G_2) = m+n$. 定理证毕.

由定理 3 可见，完全 n 部图的反色数为 n.

定理 4　对于满足 $2 \leqslant m \leqslant n$ 的任意整数 m 和 n，存在图 G 使得 $\chi(G) = m$，$\overline{\chi}(G) = n$.

证　令 $S = n - m + 2 \geqslant 2$，在完全二部图 $K_{S,S}$ 中去掉 S 条独立边（完美匹配）得到图 H，$\chi(H) = 2$，在这所去掉的 S 条独立边中，每条独立边的两个端点可作为图 H 的一个色组，可见存在图 H 的一个 $S-$色分折，即 $\overline{\chi}(H) \geqslant S$. 若 $\overline{\chi}(H) = t \geqslant S+1$，则在 H 的 $t-$色分折中至少有一个色组仅包含一个顶点 v（H 为 $2S$ 阶图)，该顶点与其余 $t-1$ 个色组中的每个色组均有邻点，即 $d_H(v) \geqslant t-1 \geqslant S$，这与 H 为 $S-1$ 度正则图矛盾. 因此 $\overline{\chi}(H) = S$.

若 $m = 2$，则令 $G = H$；

若 $m \geqslant 3$，则令 $G = H + K_{m-2}$.

由定理 3 可知 $\overline{\chi}(G) = S + m - 2 = n$，显然有 $\chi(G) = m$，定理 4 证毕.

下面考虑一个极图问题：对于给定色数和反色数，找出一个最小阶数的图，使之具有事先给定的色数和反色数. 由定义可见 $\chi(G) \leqslant \overline{\chi}(G)$ 对任意图成立.

设 $2 \leqslant m \leqslant n$，$f(m, n) = \min\{|V(G)|$：存在图 G 使得 $\chi(G) = m$ 且 $\overline{\chi}(G) = n\}$，由定理 4 知 $f(m, n)$ 存在.

定理 5　若 $2 \leqslant m \leqslant n$，则 $f(m, n) = 2n - m$.

证　(1) 先证 $f(m, n) \geqslant 2n - m$，$(n \geqslant m \geqslant 2)$

（反证法）若 $f(m, n) = S < 2n - m$，则存在一个 S 阶图 G，使得 $\chi(G) = m$ 且 $\overline{\chi}(G) = n$，从而有 G 的一个 $n-$色分折 $V(G) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$，由定义 1 可知：

$$\sum_{i=1}^{n} |V_i| = |V(G)| = S, \qquad |V_i| \geqslant 1, \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

易见，在这个 $n-$色分析中，仅含有一个顶点的色组至少有 $2n-S$ 个．不妨设 $|V_i|=1$ $(i=1,2,\cdots,t)$．$t\geqslant 2n-S$．

令 $V^{*}=\bigcup_{i=1}^{t}V_i$

由 $n-$色分折的定义知 $G[V^{*}]=K_t$ 为一个 t 阶完全图，由假设知 $t\geqslant 2n-S>m$．这与 $X(G)=m$ 矛盾．

(2) 再证 $f(m,n)\leqslant 2n-m$．$(n\geqslant m\geqslant 2)$

只需构造一个 $2n-m$ 阶图 G，使得 $X(G)=m$，$\overline{X}(G)=n$ 即可．图 G 构造如下：

设 $S=n-m+1$，$S\geqslant 1$．令 $H=H(A,B)$ 为一个 $2S$ 阶的二部图，两部的顶点集分别为 A 和 B．

记 $A=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{S-1}\}$;

$B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_S\}$,

$|A|=|B|=S$，令 a_i 与 b_j 在 H 中邻接当且仅当 $i\neq j$．显然 $X(H)=2$，下面考虑 $\overline{X}(H)$．

设 $V_0=\{a_0\}$，$V_S=\{b_S\}$，$V_i=\{a_i,b_i\}(1\leqslant i\leqslant S-1)$．不难验证 $V(H)=V_0\cup V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_s$ 为图 H 的一个 $(S+1)-$色分折，即 $\overline{X}(H)\geqslant S+1$，下证 $\overline{X}(H)\leqslant S+1$.

若 $\overline{X}(H)\geqslant S+2$，由于 $|V(H)|=2S$，故在 H 的任何一个 $\overline{X}(H)-$色分折中，只含有一个顶点的色组至少有 $2\overline{X}(H)-2S\geqslant 4$ 个．从而 H 中有一个阶数至少为 4 的完全子图，这与 H 是二部图矛盾．因此 $\overline{X}(H)=S+1$.

若 $m=2$，则令 $G=H$；

若 $m\geqslant 3$，则令 $G=H+K_{m-2}$．

易见 $X(G)=m$，$|V(G)|=2S+m-2=2n-m$，由定理 3 知 $\overline{X}(G)=\overline{X}(H)+m-2=S+1+m-2=n$．

由 (1) 和 (2) 得 $f(m,n)=2n-m$．定理证毕．

由定理 5 直接可得

推论　对任意 P 阶简单图 G，均有 $X(G)\leqslant\overline{X}(G)\leqslant\frac{1}{2}(P+X(G))$．

下面刻划反色数为 2 的图．对于一个图 G，如果增加一些孤立点则其反色数不变．因此，我们考虑图不含孤立顶点．

定理 6　若 $\delta(G)\geqslant 1$，则 $\overline{X}(G)=2$ 当且仅当 G 为完全二部图或者 $G=2K_2$．

证　充分性显然．

必要性：由反色数的定义知，任何图的反色数不小于其任何导出子图的反色数．不难验证 $\overline{X}(3K_2)=\overline{X}(K_2\cup P_3)=\overline{X}(P_4)=3$，由于 $\overline{X}(G)=2$，故 $3K_2$、$K_2\cup P_3$ 和 P_4 均不是 G 的导出子图．由 $X(G)\leqslant\overline{X}(G)=2$，故 $G=(A,B)$ 为二部图，两部顶点集记为

$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_S\}$,

$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_t\}$.

其中 $S\geqslant t\geqslant 1$．若 $t=1$，由于 $\delta(G)\geqslant 1$，故 $G=K_{1,S}$ 为完全二部图．下设 $t\geqslant 2$．为了方便，用 $x\sim y$ 表示两顶点 x 和 y 在 G 中邻接．

若 G 不是完全二部图，由于 $\delta(G)\geqslant 1$，故不妨设：a_1 与 b_1 不邻接，$a_1\sim b_2$ 且 $a_2\sim b_1$．

若 $a_2 \sim b_2$，则 $C = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ 在 G 中的导出子图 $G[C] = P_4$ 矛盾. 因此 a_2 与 b_2 不邻接，即 $G[C] = 2K_2$.

如果 $V(G) = C$,，则 $G = 2K_2$ 定理证毕. 现假设 $V(G) \neq C$，即存在 $v \in V(G) \setminus C$，不妨设：$v \in B$.

若 $v \sim a_1$ 且 $v \sim a_2$，则 $G[\{a_1, v, a_2, b_1\}] = P_4$，矛盾.

若 v 与 a_1 和 a_2 中其一邻接，与另一不邻. 则 $G[\{a_1, a_2, b_1, b_2, v\}] = K_2 \cup P_3$ 矛盾.

现设 v 与 a_1 和 a_2 均不邻接，由于 $d_G(v) \geqslant \delta(G) \geqslant 1$，因此必有一点 $u \in A$ 使得 $u \sim v$.

同样地，如果 u 与 b_1 和 b_2 均邻接，则 $G[\{u, b_1, b_2, a_1\}] = P_4$ 矛盾. 如果 u 与 b_1 和 b_2 中其一邻接，与另一不邻，则 $G[\{u, a_1, a_2, b_1, b_2\}] = K_2 \cup P_3$ 矛盾. 因此，u 与 b_1 和 b_2 均不邻. 又因 v 与 a_1 和 a_2 均不邻. 并注意到 $u \in A$，$v \in B$. 即得 $G[\{u, v, a_1, a_2, b_1, b_2\}] = 3K_2$，矛盾.

至此，我们证明了：若 G 不是完全二部图，则必有 $V(G) = C$，即 $G = 2K_2$. 定理证毕.

上述定理刻划了 $\overline{X}(G) = 2$ 的图 G，即为完全二部图或 $2K_2$，或者是将其增加孤立点而成的图. 一个自然且有趣的问题是：如何刻划满足 $X(G) = \overline{X}(G)$?这还有待于探讨.

参 考 文 献

1 *Lu Xinzhong. Han Jincang. Xhang Xhongfu*. 纯粹数学与应用数学. 1994, *Vol*. 10 专刊, 204～209

2 *F*. 哈拉里. 图论. 上海：上海科技出版社, 1990

On the Chromatic Number and Reciprocal Chromatic Number of Graphs

Xu Baogen

(Basic Courses Department)

Abstract In this paper, We have proved the Conjecture on the reciprocal chromatic number of graphs, which was posed in [1] and discussed the relationship between the chromatic number and the reciprocal chromatic number of graphs.

Key words graph; chromatic number; reciprocal chrmatic number; independent number