第 13 卷第 4 期　华东交通大学学报　Vol. 13 No. 4
1996 年 12 月　Journal of East China Jiaotong University　Dec. 1996

关于 Hanoi 塔问题*

周尚超　徐保根　周学松

(基础课部)

摘　要　介绍了解决 Hanoi 塔问题的一种简易的操作方法.

关键词　Hanoi 塔;递归

分类号　O 13

0　引　言

相传 17 世纪末在远东某个大庙宇中,有一根柱子上放着中心有孔的 64 个圆盘,每盘的直径各不相同,且下面盘的直径总是比上面盘的直径大,这就是 Hanoi 塔. Hanoi 塔问题是,将所有圆盘移到第 3 根柱子上,每次只能移动一个盘子,不能将大盘移到小盘之上,移动过程中可将盘子临时存放在第 2 根柱子上. 在许多有关计算机的书籍上,介绍了用计算机解该问题的方法. 例如,将 3 个盘子从 1 号柱移到 3 号柱,计算机给出的解是(用 1 号、2 号 … 表示盘子大小,号数大则盘子大)

将 1 号盘从 1 号柱移到 3 号柱;
将 2 号盘从 1 号柱移到 2 号柱;
将 1 号盘从 3 号柱移到 2 号柱;
将 3 号盘从 1 号柱移到 3 号柱;
将 1 号盘从 2 号柱移到 1 号柱;
将 2 号盘从 2 号柱移到 3 号柱;
将 1 号盘从 1 号柱移到 3 号柱.

如果按照计算机给出的解进行操作,将是很笨拙的,且随着盘子数的增加操作的难度将越来越大. 例如,当有 10 个盘子时,需要移动盘子 1 023 次. 用计算机解决问题有很大的局限性,它不能解决当盘子数无限增大的情况. 当盘子数 $n \geqslant 1\,330$ 时,计算机就给出内存不够的信息. 假设计算机的内存无限大,那么当 $n=100$ 万时,计算机至少须运行 150 秒以后才能告诉你第 1 次怎样移动盘. 计算机解决此问题的方法是:如果要解决 n,必须解决 $n-1$,要解决 $n-1$,必须解决 $n-2$……. 如果用计算机数数,从 1 数到 100 万,在 486 微机上一般要 150 秒.

收稿日期:1996－03－11.　周尚超,男,1948 年生,教授.

* 江西省自然科学基金资助课题

因此,计算机将移动方法计算出来的时间不低于 150 秒.

我们从理论上对Hanoi塔问题进行 研究,得到了准确无误的操作简单的解决办法. 无论 n 有多大,都可以立即进行、不需要计算时间. 如果将 n 个盘子从一个柱子移到另一个柱需要移动的盘子次数最少是 count (n),那么我们的操作方法将一定在 count (n) 次之后完成.

1 操作方法

n 个盘子用 1 号盘,2 号盘,…n 号盘表示,号数大则盘子大. 不是 1 号盘的盘称为非 1 号盘. 在操作开始以前和操作完成之后,只有 1 个柱子上有盘子,两个柱子上无盘子. 在第 1 次移动盘子之后到完成以前,至少有两个柱子上有盘子,没有盘子的柱子,我们假设有一个虚盘,且虚盘是最大的盘. 由于 1 号盘最小,1 号盘总是在某柱的最上面. 在第 1 次移动盘到完成之前,在 3 根柱子最上面的 3 个盘子是

1 号盘 i 号盘 j 号盘 ($i<j$)

其中 j 号盘可能是虚盘. 为叙述与操作方便,把 i 号盘称为小盘,j 号盘称为大盘. 这是因为,在操作过程,我们只需要知道一个盘是否 1 号盘,在两个非 1 号盘中,只要知哪个大哪个小就行了,不需知道它是第几号盘. 这样 3 根柱子最上面的 3 个盘子是

1 号盘 小盘 大盘

将 n 个盘子从 1 号柱移往 3 号柱的方法.

方法 1.1 第 1 次移动的盘子是 1 号盘,如果上次移动了 1 号盘,则本次移动非 1 号盘;如果上次移动了非 1 号盘,则本次移动 1 号盘.

方法 1.2 移动非 1 号盘的方法是把小盘移到大盘上.

方法 1.3 移动 1 号盘的方法. 按 n 为奇偶数分为两种. 设 1 号盘在 A 号柱上.

方法 1.3.1 设 n 为奇数,把 1 号盘从 A 号柱移往 $A+2$ 号柱(如 $A>1$ 则移往 $A-1$ 号柱). 即 1 号盘的移动路线是:1 号柱⇒3 号柱⇒2 号柱⇒1 号柱.

方法 1.3.2 设 n 为偶数,把 1 号盘从 A 号柱移往 $A+1$ 号柱(如 $A>2$ 则移往 $A-2$ 号柱). 即 1 号盘的移动路线是:1 号柱⇒2 号柱⇒3 号柱⇒1 号柱.

移动 1 号盘是按柱子号来移动的. 在实际操作中,盘子数不会太多,下面我们给出移 1 号盘的另一种方法,它是按盘子号来移动的。

方法 1.3* 移动 1 号盘的方法. 如果是第 1 次移动 1 号盘,按方法 1.3 进行. 注意到在第 1 次移动之后,3 根柱子最上面的 3 个盘子是:1 号盘,小盘和大盘. 方法是:如果小盘号是偶数,把 1 号盘移到小盘上,否则移到大盘上.

2 操作方法的证明

将 n 个盘子从 1 号柱移到 3 号柱,可按如下 3 步进行.

步 1 将 1 号柱上的 $n-1$ 个盘移往 2 号柱.

步 2 将 1 号柱上的 n 号盘移往 3 号柱.

步 3　将 2 号柱上的 $n-1$ 个盘移往 3 号柱或移到 n 号盘之上.

我们用 $[k]$ 表示把 1，2，…，k 号共 k 个盘从 1 柱移往另一柱，用 k 表示把 k 号盘从 1 柱移往另一柱，用 $A\to B$ 表示从 A 号柱移往 B 号柱. nj 表示 $n-j$，kj 表示 $k-j$. 上述 3 步可记为

$$\underset{1\to 3}{[n]} = \underset{1\to 2}{[n1]} \quad \underset{1\to 3}{n} \quad \underset{2\to 3}{[n1]}$$

或简记为 $[n]=[n1]\,n\,[n1]$. 设 count (n) 表示移动的最小次数，则 count $(n)=2$count $(n1)+1$. 用递推法又可得

$$[n1]=[n2]\,n1\,[n2]$$
$$[n2]=[n3]\,n2\,[n3]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[3]=[2]\,1\,[2]$$
$$[2]=[1]\,2\,[1]$$
$$[1]=1$$

由 count $(1)=1$，易知 count $(n)=2^n-1$. n 号盘在整个移动过程中只移动 1 次. $n1$ 号盘只移动 2 次，一般地，k 号盘移动的次数是 $k+1$ 号盘的两倍. 上述 3 步详记如下：

$\underset{1\to 3}{[n]}$	=	$\underset{1\to 2}{[n1]}$	$\underset{1\to 3}{n}$	$\underset{2\to 3}{[n1]}$
第 1 到第 2^n-1 次		第 1 到第 $2^{n1}-1$ 次	第 2^{n1} 次	第 $2^{n1}+1$ 到第 2^n-1 次

我们把 1，2，3 号柱分别称为 $\underset{1\to 3}{[n]}$ 的源、中、目. 相应地 $\underset{1\to 2}{[n1]}$ 和 $\underset{2\to 3}{[n1]}$ 的源、中、目分别是 1，3，2 和 2，1，3. 设第 j 次移盘是从 $f(j)$ 柱到 $g(j)$ 柱 $(1\leqslant j\leqslant 2^{n1}-1)$，如 $f(j)$ 是 $\underset{1\to 2}{[n1]}$ 的源（中和目），则 $f(2^{n1}+j)$ 也是 $\underset{2\to 3}{[n]}$ 的源（中和目），两者的源（中和目）相差 1. 因此，$f(2^{n1}+j)=f(j)+1$，$g(2^{n1}+j)=g(j)+1$. 如加 1 后大于 3，则将其值减 3. 如果将 $[n]=[n1]\,n\,[n1]$ 改为 $[k]=[k1]\,k\,[k1]$，也有类似的结论，但也不完全相同. 例如前者 n 号盘是在第 2^{n1} 次移动的，只移动一次，对 k 号盘则是：第 1 次移动 k 号盘是在第 2^{k1} 次，以后每隔 2^k 次移动一次. 下面推证第一次是怎样移动盘子的.

第 1 次到第 2^n-1 次：$[n]\ 1\to 3$；

第 1 次到第 $2^{n1}-1$ 次：$[n1]\ 1\to 2$；

第 1 次到第 $2^{n2}-1$ 次：$[n2]\ 1\to 3$；

…………

第 1 次到第 $2^{n(n-1)}-1$ 次即第 1 次 $[1]\ 1\to\begin{cases}3 & n\text{ 为奇数,}\\ 2 & n\text{ 为偶数.}\end{cases}$，即 $f(1)=1$，$g(1)=3(2)$，n 奇（偶）. 整理得如下结果.

2．1　Count $(n)=2^n-1$.

2．2　k 号盘被移动的次数是 2^{n-k}. 特别地，n 号盘只移动 1 次，1 号盘移动次数最多，为 2^{n-1} 次.

2．3　如果 i 被 2^{k-1} 整除，但不被 2^k 整除，则第 i 次移动的是 k 号盘. 即当 $i=2^{k-1}+j\cdot 2^k$，$j=0,1,\ldots,2^{n-k}-1$ 时移动的是 k 号盘，特别地第奇数次移动的是 1 号盘. 第一次移动 k 号

盘在第 2^{k-1} 次，以后每隔 2^k 次移动 1 次 k 号盘.

2. 4　设第 i 次是将 $f(i)$ 号柱子上的盘移到 $g(i)$ 号柱. 分 n 为奇偶数两种情况.

2. 4. 1　n 为奇数

$$f(1)=1,\quad g(1)=3,\quad f(2^k)=1,\quad g(2^k)=\begin{cases}2 & k\text{ 为奇数},\\ 3 & k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$$f(2^k+j)=\begin{cases}f(j)+2 & k\text{ 为奇数},\\ f(j)+1 & k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$$g(2^k+j)=\begin{cases}g(j)+2 & k\text{ 为奇数},\\ f(j)+1 & k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$$k=1,2,\cdots,n-1;\qquad j=1,2,\cdots,2^k\cdots1.$$

2. 4. 2　n 为偶数

$$f(1)=1,\quad g(1)=2,\quad f(2^k)=1,\quad g(2^k)=\begin{cases}3 & k\text{ 为奇数},\\ 2 & k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$$f(2^k+j)=\begin{cases}f(j)+1 & k\text{ 为奇数},\\ f(j)+2 & k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$$g(2^k+j)=\begin{cases}g(j)+1 & k\text{ 为奇数},\\ f(j)+2 & k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$$k=1,2,\cdots,n-1;\qquad j=1,2,\cdots,2^k-1.$$

如 f 和 g 大于 3，则将其减 3.

由 2. 4 可得 2. 5.

2. 5　如 i 是奇数，则 $g(i)-f(i)=g(1)-f(1)$. 当 n 是奇数，$g(i)=f(i)+2$，即 1 号盘的移动路线是 1 号柱⇒3 号柱⇒2 号柱⇒1 号柱. 当 n 是偶数，$g(i)=f(i)+1$，1 号盘的移动路线是 1 号柱⇒2 号柱⇒3 号柱⇒1 号柱.

上述 2. 3 是对方法 1. 1 的证明，2. 5 是对方法 1. 3 的证明. 方法 1. 2 是显然的. 下证方法 1. 3*.

设 1 号盘下是 2，3，…，$k1$ 号盘，k 号盘不在 $k1$ 盘下，则 k 盘是另外两根柱子上的最小盘. 3 根柱子最上的 3 个盘是 1 号，k 号和 j 号盘，$k<j$. 这是处于 k 号盘移动之后要移动 1 号盘时的情况. 按前面的论述，移动 k 号盘前后的若干次操作是 $\cdots A\xrightarrow{[k1]}B\ A\xrightarrow{k}C\ B\xrightarrow{[k1]}C\cdots$. 即下一步要将 B 柱上的 $k1$ 个盘移到 k 号盘所在的 C 柱上. 若 k 是偶数，则 $k1$ 是奇数，要将奇数个盘从 B 柱移往 C 柱，第 1 次须将 1 号盘移到 C 柱的 k 盘之上. 如果 k 是奇数，则将 1 号盘移到 j 号盘之上.

参 考 文 献

1　金志权，陈　　. 人工智能程序设计. 南京：南京大学出版社，1986

On Hanoi Tower Problem

Zhou Shangchao　Xu Baogen　Zhou Xuesong

(Basic Courses Department)

Abstract　This paper introduces a simple method for Hanoi tower problems.

Key words: Hanoi tower; recursion