第14卷第3期
1997年9月
Journal of East China Jiaotong University
Vol. 14 No. 3
Sep. 1997

一类(k,d)-算术图

刘二根

(基础课部)

摘　要　证明广义$K(4,n)$图是$(2d+2r,d)$-算术图或$(d+2r,d)$-算术图,并且提出了一个猜想⒀

关键词　算术图;标号函数;$K(4,n)$图

分类号　O 157.5

0　引　言

本文所讨论的图均为无向简单图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图的顶点集和边集,文中未说明的符号及术语均同于文献[1]⒀

定义 1　对于一个(p,q)-图G,如果存在一个$V(G)$到非负整数集N_0的一个映射f(称为顶点标号函数)使得满足

(1) $f(u)\neq f(v)$;　$u\neq v$,　$u,v\in V(G)$

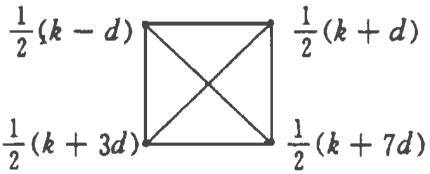
(2) $\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(G)\}=\{k,k+d,\cdots,k+(q-1)d\}$,称图$G$为$(k,d)$-算术图⒀

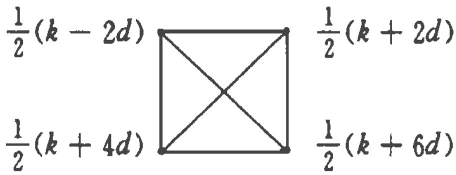
由定义1算术图是对图的顶点作标号,由此导出的边权成等差数列,而这种顶点标号是否存在缺少一般的方法,因而目前也只解决了一些特殊图的这种标号,本文对$K(4,n)$图找到了这种标号⒀

定义 2　令$K(4,0)=K_4$且$V(K(4,0))=\{u_0,v_1^{(0)},v_2^{(0)},v_3^{(0)}\}$,沿$v_1^{(0)},v_2^{(0)},v_3^{(0)}$出发作边$v_1^{(0)}v_1^{(1)},v_2^{(0)}v_2^{(1)},v_3^{(0)}v_3^{(1)}$,连接$v_1^{(1)}v_2^{(1)},v_2^{(1)}v_3^{(1)},v_1^{(1)}v_3^{(1)}$所得到的图记为$K(4,1)$,而$K(4,n)$是由$K(4,n-1)$通过增加新点$v_1^{(n)},v_2^{(n)},v_3^{(n)}$及新边$v_1^{(n)}v_2^{(n)},v_2^{(n)}v_3^{(n)},v_1^{(n)}v_3^{(n)},v_1^{(n-1)}v_1^{(n)},v_2^{(n-1)}v_2^{(n)},v_3^{(n-1)}v_3^{(n)}$所得到⒀

引理 1　设$x_1,\cdots,x_n\in N_0$且x_i两两不同,令$x'_i=x_i+r(r\in N_0)$,若$x_i+x_j(i\neq j)$成等差数列,则$x'_i+x'_j$也成等差数列⒀

引理 2[2]　对K_4有且仅有下面两种标号方法:

(1)


(2)


由引理2很容易得到

收稿日期:1997-12-04⒀　刘二根,男,1965年生,讲师⒀

引理 3　K_4 是(k,d)-算术图的充要条件是 $k=2d+2r$ 或 $k=d+2r$⒀

1　定理及证明

定理 1　广义 $K(4,n)$ 图是$(2d,d)$-算术图⒀

证明　设 $f: V(K(4,n)) \longrightarrow N_0$ 满足

$$f(u_0)=0$$

$$f(v_i^{(2j)})=\begin{cases}4d+6jd; & i=1; j=0,1,2,\cdots,[n/2],\\ id+6jd; & i=2,3; j=0,1,2,\cdots,[n/2]⒀\end{cases} \qquad (1)$$

$$f(v_i^{(2j+1)})=4d+id+6jd;\quad i=1,2,3; j=0,1,2,\cdots,[(n-1)/2]⒀$$

显然 $f(v_i^{(2j)})<f(v_i^{(2j+1)})<f(v_i^{(2j+2)})$ 且 $f(v_i^{(2j)}), f(v_2^{(2j)}), f(v_3^{(2j)}), f(v_1^{(2j+1)}), f(v_2^{(2j+1)})$, $f(v_3^{(2j+1)})$ 也不相同，故标号函数 f 满足：$f(u)\neq f(v), u\neq v, u$、$v\in V(K(4,n))$⒀

下面证明 $\{f(u)+f(v) \mid uv\in E(K(4,n))\}$ 成等差数列，事实上

当 $n=0$ 时，$f(u)=0, f(v_1^{(0)})=4d, f(v_2^{(0)})=2d, f(v_3^{(0)})=3d$，故 $\{f(u)+f(v) \mid uv\in E(K(4,0))\}=\{2d,3d,4d,5d,6d,7d\}$⒀

当 $n=1$ 时，$f(u)=0, f(v_1^{(0)})=4d, f(v_2^{(0)})=2d, f(v_3^{(0)})=3d, f(v_1^{(1)})=5d, f(v_2^{(1)})=6d, f(v_3^{(1)})=7d$，故 $\{f(u)+f(v) \mid uv\in E(K(4,1))\}=\{2d,3d,4d,5d,6d,7d,8d,9d,10d,11d,12d,13d\}$⒀

假设对所有 $m<n$ 有 $\{f(u)+f(v) \mid uv\in E(K(4,m))\}=\{2d,3d,\cdots,2d+(6(m+1)-1)d\}$⒀

若 $n=2k$ 则 $f(v_1^{(2k)})=4d+6kd, f(v_2^{(2k)})=2d+6kd, f(v_3^{(2k)})=3d+6kd$，而 $f(v_1^{(2k-1)})=6kd-d, f(v_2^{(2k-1)})=6kd, f(v_3^{(2k-1)})=6kd+d$⒀

故　$f(v_2^{(2k-1)})+f(v_2^{(2k)})=2d+12kd; f(v_1^{(2k-1)})+f(v_1^{(2k)})=3d+12kd;$

$f(v_3^{(2k-1)})+f(v_3^{(2k)})=4d+12kd; f(v_2^{(2k)})+f(v_3^{(2k)})=5d+12kd;$

$f(v_1^{(2k)})+f(v_2^{(2k)})=6d+12kd; f(v_1^{(2k)})+f(v_3^{(2k)})=7d+12kd$⒀

这时 $m=n-1=2k-1, 2d+(6(m+1)-1)d=d+12kd$，故 $\{f(u)+f(v) \mid uv\in E(K(4,2k))\}=\{2d,3d,\cdots,2d+(6(2k+1)-1)d\}$⒀

若 $n=2k+1$ 时，同理可证 $\{f(u)+f(v) \mid uv\in E(K(4,2k+1))\}=\{2d,3d,\cdots,2d+(6(2k+2)-1)d\}$⒀

由数学归纳法可得 $\{f(u)+f(v) \mid uv\in E(K(4,n))\}$ 成等差数列⒀

由此可知图 $K(4,n)$ 是$(2d,d)$-算术图⒀

定理 2　广义 $K(4,n)$ 图是$((2d+2r),d)$-算术图，其中 $r\in N_0$⒀

证明　设 $f_1: V(K(4,n))\to N_0$ 满足式(1)

令 $f: V(K(4,n))\to N_0$ 满足

$f(u)=f_1(u)+r, u\in V(K(4,n)), r\in N_0$，则由引理 1 及定理 1 可得：

(1) $f(u)\neq f(v), u\neq v, u$、$v\in V(K(4,n))$，

(2) $\{f(u)+f(v) \mid uv\in E(K(4,n))\}=\{2d+2r, 3d+2r,\cdots,2d+2r+(6(n+1)-1)d\}$⒀

故图 $K(4,n)$ 是$(2d+2r,d)$-算术图⒀

定理 3 广义 $K(4,n)$ 图是 (d,d)-算术图

证明 令 $v_i^{(n)}=u_i^{(0)},v_i^{(n-1)}=u_i^{(1)},v_i^{(n-2)}=u_i^{(2)},\cdots,v_i^{(0)}=u_i^{(n)},i=1,2,3$

设 $f:V(K(4,n))\to N_0$ 满足

$$f(u_0)=4d+3nd$$

$$f(u_i^{(2j)})=6jd+(i-1)d;i=1,2,3;j=0,1,2,\cdots,[n/2]$$

$$f(u_i^{(2j+1)})=\begin{cases}3d+6jd+id;i=1,2;j=0,1,2,\cdots,[(n-1)/2]\\3d+6jd;i=3;j=0,1,2,\cdots,[(n-1)/2]\end{cases}$$

类似定理 1 的证明方法可以证明标号函数 f 满足

(1) $f(u)\neq f(v),u\neq v,u,v\in V(K(4,n))$

(2) $\{f(u)+f(v)\mid uv\in E(K(4,n))\}=\{d,2d,\cdots,6(n+1)d\}$

故图 $K(4,n)$ 是 (d,d)-算术图

由引理 1 及定理 3 可得

定理 4 广义 $K(4,n)$ 图是 $(d+2r,d)$-算术图，$r\in N_0$

2 猜 想

由于当 $n=0$ 时 $K(4,n)=K_4$，故由引理 3 提出下面猜想

猜想 广义 $K(4,n)$ 图是 (k,d)-算术图的充要条件是 $k=2d+2r$ 或 $k=d+2r$

参 考 文 献

1 F Harary. Graph Theory. Addison Wesley, Reacling, MA, 1969

2 Acharya B D, Hegde S M. Arithemetic Graph. Journal of Graph Theory, 1990, 14(3): 275～299

A Class of (k,d)-Arithmetic Graph

Liu Ergen

(Basic Courses Department)

Abstract In this paper, We prove the graph $K(4,n)$ is $(2d+2r,d)$-arithmetic graph or $(d+2r,d)$-arithmetic graph and offer a conjecture.

Key words (k,d)-arithenetic graph; labeling function; $K(4,n)$ graph