

# 一种非平移不变域上紧支撑小波的构造方法

李文舜<sup>1</sup> 李介谷<sup>2</sup>

(1 电子与信息工程系 2 上海交通大学图象处理与模式识别研究所)

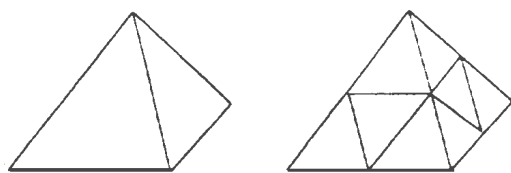
**摘要** 本文以一个简单的非平移不变域为实例进行多分辨分析,在其上构造紧支撑小波,并试图通过对在实线段域上构造小波基的过程作解释和证明,以便将其思想应用到其它非平移不变拓扑域上<sup>19</sup>.

**关键词** 多分辨分析;尺度空间;紧支撑;三角网格

**分类号** TN 911.7

## 0 引言

小波分析是 80 年代以来发展起来的新理论,越来越受到国内外各个学科领域的工作者的重视<sup>19</sup>.Mallat 提出的多分辨分析概念是小波理论最根本的概念之一<sup>19</sup>.多分辨分析最重要的两个组成部分是:一系列嵌套空间和为分辨正交性的内积<sup>(1)</sup><sup>19</sup>.在理论分析中,一般限于在平移不变域上进行讨论,如实直线( $R$ )域<sup>19</sup>.此时,嵌套空间可由一个简单的尺度函数经扩张和平移构成<sup>19</sup>.但在实际应用中,有很多非平移不变域的情况<sup>19</sup>.在如图 1 的四面体上参数化可得到一个三角网格空间<sup>(2)</sup>,此时四面体作为一个拓扑域是非平移不变的<sup>19</sup>.实线段域作为一个非平移不变域是本文的研究出发点,并将其结论推广应用到三角网格的分解与重构中<sup>19</sup>.



(a)  $K^0$  域 (b)  $K^0$  域细分为  $K^1$  域  
图 1 四面体上三角网格空间

## 1 尺度函数及嵌套空间

本节所用到的基本符号和记号有:

$L^2(0, 1) = \{f(x), x \in [0, 1] \mid f(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 上连续, 且满足: } \int_0^1 |f(x)|^2 < \infty\}$  这是实线段域上的一个空间<sup>(3)</sup>.对于  $j = 0, 1, \dots, \infty$ , 第  $j$  层尺度空间记为  $V^j$ .  $\Phi_j(x)$  为  $V^j$  的一组基,称为第  $j$  层尺度函数<sup>(13)</sup>.

多分辨分析一个最重要部分就是构造一系列嵌套的尺度空间： $V^0, V^1, \dots, V^\infty$ ，并使其满足： $V^0 \subset V^1 \dots \subset V^\infty$ ，且  $V^\infty = L^2(0, 1)$  (13)

设  $f^j(x)$  为  $[0, 1]$  上的折线函数，且它有且仅有  $2^j - 1$  个转折点： $1/2^j, 2/2^j \dots (2^j - 1)/2^j$  (如图 2) (13) 我们定义  $V^j = \{f^j(x), x \in [0, 1] | f^j(i/2^j) < \infty, i = 0, 1, 2, \dots, 2^j\}$  (13) 显然， $V^\infty = L^2(0, 1)$  (13) 的一组基即尺度函数  $\Phi_i(x)$  如下构成：它为分段线性

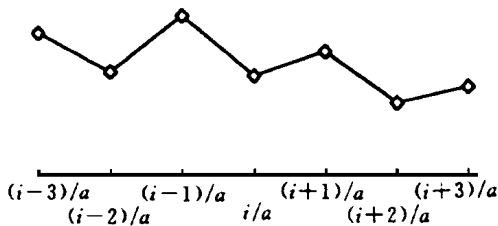
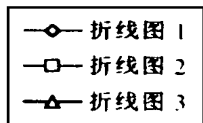
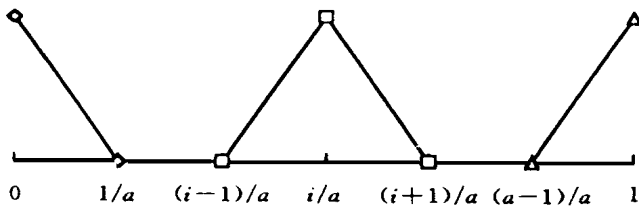


图 2 折线函数(其中  $a = 2^j$ )



说明：折线图 1 为  $\Phi(x)$ ；

折线图 2 为  $\Phi_{i-1}(x)$ ；折线图 3 为  $\Phi_{i+1}(x)$  (其中  $a = 2^j$ )。

图 3 不同位置的  $j$  层尺度函数

函数，当  $x = i/2^j$  时， $\Phi(i/2^j) = 1$ ；而在  $i/2^j$  的两个(或一个)邻居点线性递减为 0 (图 3 中三个尺度函数分别为  $\Phi_{i-1}(x)$ ,  $\Phi_i(x)$ ,  $\Phi_{i+1}(x)$ ) (13) 显然，对于  $f^j(x) \in V^j$ ，令  $a = 2^j$ ，都有

$$f^j(x) = \sum_{i=0}^{i=a} \Phi_i(x) \cdot f^j(i/2^j) \quad (13)$$

因此， $\Phi_i(x)$  是  $V^j$  的一组基，并且它们是紧支撑的 (13)

**结论 1** 由以上方法构成的尺度空间具有嵌套性，即

$$V^0 \subset V^1 \dots \subset V^\infty \quad (13)$$

**证明** 考察尺度空间  $V^j, V^{j+1}$  的基  $\Phi_i(x), \Phi_{i+1}^+(x)$  的关系：

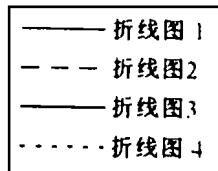
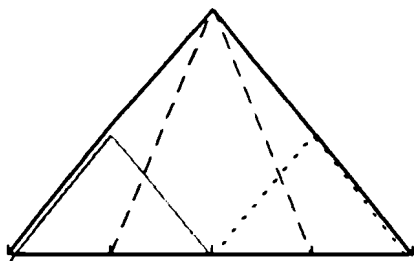
(1) 当  $i \neq 0$  且  $i \neq 2^j$  时 (如图 4)

$$\Phi_i(x) = \Phi_{i-1}^+(x) + 0.5\Phi_{i-1}^+(x) + 0.5\Phi_{i+1}^+(x) \quad (13)$$

(2) 当  $i = 0$  时

$$\Phi_0(x) = \Phi_0^+(x) + 0.5\Phi_{2^j}^+(x) \quad (13)$$

(3) 当  $i = 2^j$  时



说明：折线图 1 为  $\Phi_{i-1}^+(x)$ ；折线图 2 为  $\Phi_i^+(x)$ ；折线图 3 为  $\Phi_i(x)$ ；

折线图 4 为  $\Phi_{i+1}^+(x)$  (其中  $a = 2^j$ ) (13)

图 4  $j + 1$  层与  $j$  层尺度函数的关系

$$\Phi_i(x) = \Phi_{2i}^{+1}(x) + 0.5\Phi_{i-1}^{+1}(x) \quad (13)$$

因此,  $\Phi$  是  $\Phi^{+1}$  的线性组合, 即  $V^j \subset V^{j+1}$  (13)

## 2 内 积

为了构造  $V^j$  在  $V^{j+1}$  的正交补空间, 应在尺度空间中引入内积, 使其成为内积空间 (13) 由泛函理论 (3) 知, 内积应满足如下条件:

(1)  $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in V$  (正定性), 而且  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;

(2)  $(y, x) = \overline{(x, y)} \quad \forall x, y \in V$  (共轭对称性);

(3)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y \in V$ ,

$(ax, y) = a(x, y) \quad \forall x, y \in V$ . (对第一变元的线性性质)

设  $f, g \in V^j$ , 若定义  $\langle f, g \rangle = \int f(x) \cdot g(x) dx$  为  $f, g$  的内积 (13) 显然, 这是满足条件 (1) ~ (3) 的 (13) 至此, 具有嵌套性的内积空间已构成 (13)

在定义了内积之后, 我们就可知道  $V^j$  空间的基  $\Phi_i(x)$  之间的关系 (13) 它们只有三种关系:

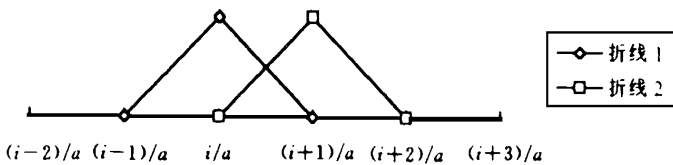
(1) 当  $i$  与  $k$  不相邻时,  $\Phi_i(x)$  与  $\Phi_k(x)$  的支撑没有重叠, 因而内积值为 0 (13)

(2) 当  $i = k$  时, 此时有

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i(x), \Phi_k(x) \rangle &= \int \Phi_i(x) \cdot \Phi_i(x) dx = \int_{i-1/a}^{i+1/a} \Phi_i(x) \cdot \Phi_i(x) dx = \\ &= 2 \int_{i/a}^{i+1/a} [1 - a(x - i/a)]^2 dx = 2 \int_0^{1/a} (1 - ax)^2 dx = \\ &= 2/a \int_0^1 (1 - y)^2 dy = 2/a(y - 1)^3/3 \Big|_0^1 = 2/3a \quad (13) \end{aligned}$$

注, 当  $i = k = 0$  或  $i = k = a$  时, 内积值为  $1/3a$  (13) = 0 或  $i = a$  作为特殊情况不在此讨论范围之内 (13)

(3) 当  $i$  与  $j$  相邻时, 见图 5 (13) 此时有



说明: 其中  $a = 2^j$ . 折线 1 为  $\Phi_i$ ; 折线 2 为  $\Phi_{i+1}$ .

图 5 两相邻  $j$  层尺度函数

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i(x), \Phi_{i+1}(x) \rangle &= \int \Phi_i(x) \cdot \Phi_{i+1}(x) dx = \int_{i/a}^{i+1/a} [1 - a(x - i/a)] \\ &= \int_0^{1/a} (1 - ax) [a(x - 1/a) + 1] dx = \\ &= 1/a \int_0^1 (1 - y) y dy = 1/a(y^2/2 - y^3/3) \Big|_0^1 = 1/6a \quad (13) \end{aligned}$$

$\Phi_k^{+1}(x)$  所有这些简单关系给多分辨分析带来方便(13)

### 3 小波基的构造

$\Phi^{+1}(x) (i = 0, 1, \dots, 2^j - 1)$  是  $V^{j+1}$  的一组基(13)事实上,  $\Phi (i = 0, 1, \dots, 2^j)$  与  $\Phi_{2i+1}^{+1} (i = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1)$  也是  $V^{j+1}$  的一组基(13)这是因为两组函数能相互线性表示,是等价的(13)为区别起见,将  $\Phi_{2i+1}^{+1} (i = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1)$  记为  $\beta_i^{+1} (i = 0, 1, \dots, 2^j - 1)$  (13)对于  $f^{j+1} \in V^{j+1}$ , 若  $V^{j+1}$  以  $(\Phi, \beta^{+1})$  为基, 则  $f^{j+1} = \sum_{i=0}^{i=2^j-1} a_i \Phi + \sum_{i=0}^{i=2^j-1} b_i \beta_i^{+1} (a = 2^j)$  (13)令  $b_i = 0$ , 则  $g^j = \sum_{i=0}^{i=2^j-1} a_i \Phi$  是  $f^{j+1}$  在  $V^j$  空间的逼近(见图 6 中的折线 3) (13)由于  $\Phi$  与  $\beta_i^{+1}$  不是正交的,  $f^j$  不是  $f^{j+1}$  在  $V^j$  空间的最小平方逼近(13)

**结论 2**  $\Psi_i = \beta_i^{+1} - \Phi \cdot a_i$  (与  $\Phi$  正交) (1)

若  $a_i = (a_{0,i}, a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{i-1,i}, a_{i,i}, a_{i+1,i}, a_{i+2,i}, \dots, a_{a-1,i}, a_{a,i})^T =$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3/8 \\ 3/8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

**证明** 令  $\langle \Phi_i(x), \Phi(x) \rangle = C$ , 则

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x), \beta_i^{+1} \rangle &= \int_{-i/a}^{(2i+1)/2a} [1 - a(x - i/a)] [1 + 2a(x - (2i + 1)2a)] dx + \\ &\int_{(2i+1)/2a}^{(i+1)/a} [1 - a(x - i/a)] [1 - 2a(x - (2i + 1)2a)] dx = \\ &\int_0^{1/2a} [1 - ax] \cdot 2ax dx + \int_{-1/2a}^0 (-ax) \cdot (-2ax) dx = \\ &\int_0^{1/2a} 2ax dx = 1/4a = 3C/8; \end{aligned}$$

同理  $\langle \Phi_{+1}(x), \beta_i^{+1} \rangle = 3C/8(13)$

将式(1) 两边乘以  $\Phi(x)$  得

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x), \Psi_i \rangle &= \langle \Phi(x), \beta_i^{+1} \rangle + a_{0,i} \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle + \\ &a_{1,i} \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = 0 - a_{0,i}C/2 - a_{1,i}C/4(13) \end{aligned}$$

由式(2) 知  $\langle \Phi(x), \Psi_i \rangle = 0$ ;

同理  $\langle \Phi(x), \Psi_i \rangle = \langle \Phi(x), \beta_i^{+1} \rangle + a_{0,i} \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle + a_{1,i} \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle + a_{2,i} \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle = 0 - a_{0,i}C/4 - a_{1,i}C - a_{2,i}C/4 = 0,$

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x), \Psi_i \rangle &= \langle \Phi(x), \beta_i^{+1} \rangle + a_{i-1,i} \langle \Phi(x), \Phi_{i-1}(x) \rangle + a_{i,i} \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle + \\ &a_{i+1,i} \langle \Phi(x), \Phi_{+1}(x) \rangle = 3C/8 - a_{i-1,i}C/4 - a_{i,i}C - a_{i+1,i}C/4 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{i+1}(x), \Psi_i^j \rangle &= \langle \Phi_{i+1}(x), \beta_i^{j+1} \rangle + a_{i,i} \langle \Phi_{i+1}(x), \Phi_i(x) \rangle + \\ & a_{i+1,i} \langle \Phi_{i+1}(x), \Phi_{i+1}(x) \rangle + a_{i+2,i} \langle \Phi_{i+1}(x), \Phi_{i+2}(x) \rangle = \\ & 3C/8 - a_{i,i}C/4 - a_{i+1,i}C - a_{i+2,i}C/4 = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

类推可知  $\Psi_i^j$  与  $\Phi$  正交(13)

**结论 3** 若  $V_i^{j+1}$  以  $\Phi$  和  $\Psi^j$  为基, 则对于  $f^{j+1} \in V^{j+1}, f^{j+1} = \sum_{i=0}^{i=a} a_i \Phi + \sum_{i=0}^{i=a-1} b_i \Psi_i^j$  在  $V^j$

空间的最小平方逼近是  $f^j = \sum_{i=0}^{i=a} a_i \Phi$  (其中  $a = 2^j$ )

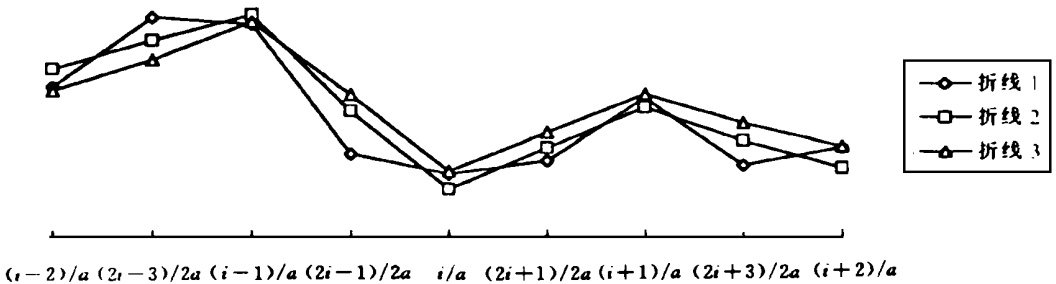
**证明** 若以  $g^j \in V^j$  作为  $f^{j+1}$  在  $V^j$  中的逼近, 则误差函数

$$D(x) = f^{j+1} - g^j = \sum_{i=0}^{i=a} a_i \Phi + \sum_{i=0}^{i=a-1} b_i \Psi_i^j - g^j = (f^j - g^j) + \sum_{i=0}^{i=a-1} b_i \Psi_i^j \quad (13)$$

由于  $(f^j - g^j) \in V^j$ , 所以  $\sum_{i=0}^{i=a-1} b_i \Psi_i^j$  与  $(f^j - g^j)$  正交(13)

$$\|D(x)\|^2 = \|f^j - g^j\|^2 + \left\| \sum_{i=0}^{i=a-1} b_i \Psi_i^j \right\|^2 \geq \left\| \sum_{i=0}^{i=a-1} b_i \Psi_i^j \right\|^2.$$

所以,  $f^j$  是  $f^{j+1}$  在  $V^j$  空间的最小平方逼近 (见图 6 中的折线 2) (13)



说明: 其中  $a = 2^j$ . 折线 1 为  $f^{j+1}$ ; 折线 2 为  $f^j$ ; 折线 3 为  $g^j$ .

图 6  $j + 1$  层尺度空间中的函数在  $j$  层尺度空间的逼近

尽管由式 (1) 可求出与  $\Phi$  正交的小波  $\Psi$ , 便由式 (2) 我们知此小波为全局支撑(13)在实际应用中为了得到线性计算时间, 总希望得到紧支撑小波(13)关于构造紧支撑小波, 有各种各样的处理方法(13)Mallat<sup>[4]</sup> 构造的小波与尺度函数是正交的, 且相互间也正交(13)但这种小波指数衰减, 不是紧支撑的(13)为此, 他采用截取的办法使其为紧支撑(13)尽管不是严格正交, 但在实际应用中还是允许的(13)其中最大的缺点是分解之后没有完全意义上的重构(13)

我们处理的办法是: 对于式 (1), 令远离的  $\beta_i^{j+1}$  的尺度函数系数为 0, 也即是支撑大小由自己选定(13)例如, 若只保留与  $\beta_i^{j+1}$  最接近的两个尺度函数的系数  $a_{i+1,i}$  和  $a_{i,i}$ , 即

$$\Psi_i^j = \beta_i^{j+1} - a_{i+1,i} \Phi_{i+1} - a_{i,i} \Phi_i. \quad (3)$$

在式 (3) 两边分别乘以  $\Phi_{i+1}$  和  $\Phi_i$  可得如下方程组 (其中  $a = \langle \Phi_i(x), \Phi_i(x) \rangle$ ):

$$0 = 3a/8 - a_{i+1,i}a - a_{i,i}a/4,$$

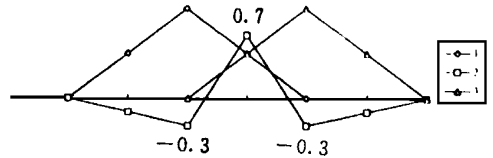
$$0 = 3a/8 - a_{i+1,i}a/4 - a_{i,i}a \quad (13)$$

求得两系数为:  $a_{i+1,i} = a_{i,i} = 3/10$  (13)  $\Psi_i^j = 0.3\Phi_i^{j+1} - 0.3\Phi_i - 0.3\Phi_{i+1}$  的波形见图 7(13)此时  $\Psi_i^j$  只与

$\Phi_{-1}$  和  $\Phi_{+2}$  不正交, 它们的内积值为

$$0 - 3/10 \times a/4 - 0 = 3a/40$$

很小, 而与其它尺度函数都正交(13)尽管  $\Psi$  与  $\Phi$  也不是严格意义上的正交, 但通过增大支撑可使任意接近正交(13)以  $(\Phi, \Psi)$  为基分解后可达到完全重构(13)



说明: 波形 2 为小波函数  $\Psi$ ;

波形 1, 3 为与之有支撑交叠的尺度函数  $\Phi, \Phi_{+1}$ .

图 7 由  $j + 1$  层和  $j$  层尺度函数

求取  $j$  层小波函数

## 4 应用到三角网格分解与重构中

利用前述构造小波基的思想, 我们同样对定

义在图 1 中拓扑域上的三角网格进行多分辨分析, 并构造小波基(13)由图 1(a) 进行  $j$  次  $1 \sim 4$  细分得到的域记为  $K^j$ (13)注意,  $K^0, K^1, \dots, K^j$  实际上为同一拓扑域, 只是在多分辨分析中处于不同层次(13)对于参数化在  $K^j$  上的三角网格, 仍象前一样相应于每个顶点定义一个尺度函数  $\Phi$ (13)它在相应顶点值为 1, 而在相应顶点的所有邻点线性递减为 0(13)图 8 是一个具有 6 个邻点的顶点相应的尺度函数(13)注意到, 任一函数在  $K^j$  上的三角网格  $M^j$ , 都可表示为:

$$M^j(x) = \sum \Phi_i(x) \cdot V_i, \quad K^j = K^0$$

其中  $V_i$  正好为  $M^j$  的顶点(13)因此,  $\Phi$  这一组函数确实为  $M^j$  空间的尺度函数基(13)为积定义与前相似, 尺度函数之间也有一些简单关系: 若  $i, k$  同为  $K^j$  中顶点且不相邻, 内积为 0(13)若它们为相邻点, 设  $\langle \Phi_i(x), \Phi_k(x) \rangle = 1$ , 则  $\langle \Phi_i(x), \Phi_i(x) \rangle, \langle \Phi_k(x), \Phi_k(x) \rangle$  分别等于  $i, k$  的邻点数(13)关于在这一域上构造小波基的具体过程, 其思想同上, 在此不多做说明(13)

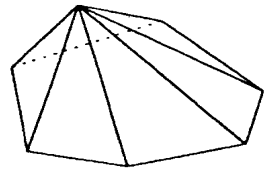


图 8 尺度函数

## 5 结束语

基于多分辨分析的三角网格分解、压缩与重构的研究具有广阔的应用前景(13)由于域的非平移不变性, 使得小波基的构造有其特殊性(13)本文试图通过对在实线段域上构造小波基的过程作解释和证明, 以便将其思想应用到基于多分辨分析的三角网格分解、压缩与重构中(13)

### 参 考 文 献

- 1 Charles K Chui. An Introduction to Wavelets. Academic Press, Inc, 1992
- 2 Matthias Eck, Tony DeRose etc. Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes. Computer Graphics Proceedings Annual Conference series. 1995. 173~182
- 3 葛锁网. 应用泛函分析基础. 北京: 高等教育出版社, 1992
- 4 S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Transaction on PAMI, 1989, 11(7): 674~693

## The Polymer PTC Elements in a New Type of Overload Self - Protective Structure of Micromotor

Liu Jingen

Zhu Shaowei

(Electronic and Information Engineering Department) (Xiangtan Ship Factory, Hunan)

**Abstract** The polymer PTC elements are studied and used to make a new type of self - protective structure of micromotor

**Key words** polmer PTC elements; micromotor; overload self - protection

---

(上接第 30 页)

## A Method of Constructing Compactly Supported Wavelets on Non - Translation Invariant Domain

Li Wenshun<sup>1</sup>

Li Jiegu<sup>2</sup>

(<sup>1</sup> Electronic and Information Engineering Department

<sup>2</sup> Institute of Image Processing & Pattern Recognition, Shanghai Jiaotong University)

**Abstract** We make a multiresolution analysis of an example of constructing compactly supported wavelets on non-translation invariant domain. Then we propose the explanation and proof for the process of constructing wavelet on real line segment domain in the hope that its concept may be applied to other non-translation invariant topological domains.

**Key words** multiresolution analysis; scaling space; compact support; triangular mesh