关于叉积图控制数的一点注记

徐保根 谢文华

(基础课部) (成人教育学院)

摘 要 设 $\gamma(G)$ 表示图 G 的控制数，$G\otimes H$ 表示两个图 G 和 H 的叉积。S Gravier[1] 提出了如下猜想：对任意图 G 和 H，均有 $\gamma(G\otimes H)\geqslant\gamma(G)\gamma(H)$。本文给出了该猜想的反例，从而说明了该猜想是不正确的。

关键词 乘积图；叉积图；控制数

分类号 O 157.5

本文所指的图均为无向简单图，文中未说明的符号、术语同文献[2]。

设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 为两个图，则 G_1 与 G_2 的乘积图记为 $G_1\times G_2$，其定义为：$V(G_1\times G_2)=V_1\times V_2$，$E(G_1\times G_2)=\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\mid u_1v_1\in E_1$ 且 $u_2=v_2$ 或者 $u_2v_2\in E_2$ 且 $u_1=v_1\}$。类似地，G_1 与 G_2 的叉积图记为 $G_1\otimes G_2$，其定义为：$V(G_1\otimes G_2)=V_1\times V_2$，$E(G_1\otimes G_2)=\{(u_1,u_2)(v_1,v_2)\mid u_1v_1\in E_1$ 且 $u_2v_2\in E_2\}$。

设 D 为 $V(G)$ 的一个子集，如果 $V(G)-D$ 中每一点 u，均有 u 的一个邻点在 D 中，则称 D 为图 G 的一个控制集。一个图 G 的控制集最小的基数称为 G 的控制数，记为 $\gamma(G)$。

对于乘积图的控制数，V G Vizing[3] 在 1963 年提出了一个著名的猜想：对任意简单图 G 和 H，均有 $\gamma(G\times H)\geqslant\gamma(G)\gamma(H)$ 成立。这一难题至今未能解决，而文献[1]中对叉积图的控制数，提出了如下类似的猜想：

猜想 对任意简单图 G 和 H，均有不等式 $\gamma(G\otimes H)\geqslant\gamma(G)\gamma(H)$ 成立。

下面我们构造猜想 Ⅰ 的反例。设图 G 为图 1 所示，并且 $H\cong G$，易见 $\gamma(G)=\gamma(H)=3$。以下验证 $\gamma(G\otimes H)\leqslant 8$。

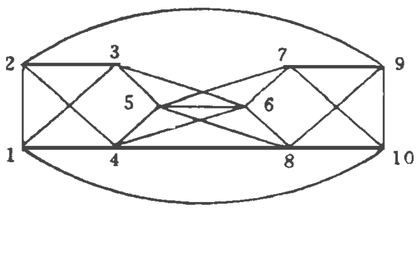

图1 图 G

由于图 $G\otimes H$ 为一个 100 阶图，不便画出。为了验证 $\gamma(G\otimes H)\leqslant 8$，我们构造一个解释图 G^* 如图 2 所示。注意到在图 2 中，虚线的左、右分别为图 G 和图 $H(G\cong H)$。对照图 1，我们对图 G 和 H 的顶点标号列为 1～10。

在图 $G\otimes H$ 中，选取其 8 个顶点构成集 $S=\{(1,1),(4,4),(8,8),(10,10),(5,6),(6,5),(1,10),(10,1)\}$，注意到 S 中每一元素(为 $G\otimes H$ 中的一个点)同时代表了 G^* 中一条虚线的两个端点。可以如下验证 S 为 $G\otimes H$ 的一个

收稿日期：1997-05-29 徐保根，男，1963 年生，讲师。

控制集⒀参见图 2⒀

对于任意 $u\in V(G)$ 和 $v\in V(H)$,则或者 $(u,v)\in S$(即 u 和 v 为 G^* 中某虚线的两端点),或者在 G^* 中存在一条道路 $u-x-y-v$,使得 $ux\in E(G)$,$yv\in E(H)$ 且 xy 为一虚线,此时意味着在 $G\otimes H$ 中,(u,v) 点邻接 (x,y) 点($(x,y)\in S$)⒀

由于 G^* 图的一种对称性,我们只需对每一个 $u\in\{1,2,3,4,5\}\subset V(G)$ 和每一个 $v\in V(H)$ 验证上述论断即可⒀因此,S 为 $G\otimes H$ 的一个控制集,即 $\gamma(G\otimes H)\leqslant|S|=8$⒀由此我们得出如下结论⒀

结论　猜想 Ⅰ 是不正确的⒀

当然,如果令 $G_m=mG$ 为 m 个图 G 的并,其中 G 为图 1 所示,显然还有

$$\gamma(G_m\otimes G_n)\leqslant 8mn<\gamma(G_m)\gamma(G_n)=9mn$$⒀

由此可见,猜想 Ⅰ 存在众多的反例⒀

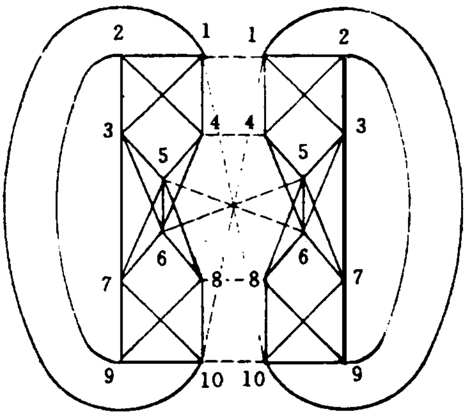

图 2　图 G^*

参　考　文　献

1　S Gravier, A Khelladi. On the domination number of cross products of graphs. Discrete Math, 1995, 145(1~3):273~277

2　J A Bondy, U S R Murty. Graph theory with applications. Macmillan, London. 1976

3　V G Vizing. The cartesian products of graphs. Vyc Sis 1963, 9, 30~43

A Note on the Domination Numbers for Cross Products of Graphs

Xu Baogen　　**Xie Wenhua**

(Basic Courses Department)　　(Adult Education College)

Abstract　Let $\gamma(G)$ denote the domination number of graph G, $G\otimes H$ be the cross products of graphs G and H. S Gravier[1] posed a conjecture as follows: For all graphs G and H, $\gamma(G\otimes H)\geqslant\gamma(G)\gamma(H)$. In this note, we give a counterexample to the conjecture, which proves this conjecture is not true.

Key words　cartesian products of graphs; cross products of graphs; domination number