完全图的 2-冠图的优美性

谢文华

(成人教育学院)

摘　要　对 n 阶完全图 K_n 的每个点增加 S 个悬挂点得到的图称为 K_n 的 S 一冠图，记为 $I_s(K_n)$⒀本文证明了 $I_2(K_n)$ 是优美图的充要条件是 $n\leqslant 11$⒀

关键词　完全图；冠图；优美图

分类号　O 157.5

本文所指的图均为无向简单图⒀一个图 $G=(V,E)$，若对每个 $u\in V$，存在一个整数 $\theta(u)$，$0\leqslant\theta(u)\leqslant|E|$，使得任 2 点的标号不相同，且由 θ导出的边 uv 的标号 $|\theta(u)-\theta(v)|$互不相同，则称 G 是优美图，θ为 G 的优美标号，则 $\theta^*(u)=|E|-\theta(u)$ 也是 G 的优美标号，称 θ^* 与 θ是同构的优美标号⒀

对图 G 的每个顶点增加 S 条悬挂边，所得的 $(S+1)$ n 阶图称为 G 的 S-冠图，记为 $I_s(G)$⒀文献[1]中猜想：优美图的冠图(1-冠图简称为冠图)是优美图⒀文献[2]中证明了如下的定理 1⒀

定理 1　当且仅当 $n\leqslant 9$ 时，$I_1(K_n)$ 是优美图⒀当 $n\leqslant 10$ 时，$I_2(K_n)$ 是优美图；当 $n\geqslant 16$ 时，$I_2(K_n)$ 不是优美图⒀

引理　设 $I_s(K_n)$ 是优美图，则存在 K_n 的顶点的一种优美标号，使 K_n 的任 2 个点的标号不相同，任 2 条边的标号也互不相同，并且在这些顶点的标号中，有一个顶点的标号是 0⒀

证明　由于 $I_s(K_n)$ 是优美图，则存在 $I_s(K_n)$ 的一个优美标号 θ在此标号下，$I_s(K_n)$ 中任 2 个点的标号互不相同，任 2 个边的标号也互不相同⒀而 K_n 是 $I_s(K_n)$ 的子图，所以 K_n 的任 2 个顶点的标号互不相同，任 2 条边的标号不相同⒀在 $I_s(K_n)$ 中，必有 2 个邻接的顶点分别标记 0 和 $|E|$，才使 $I_s(K_n)$ 中有标号为 $|E|$的边，因此 0 与 $|E|$这两个标号至少有一个是标在 K_n 的顶点上⒀如果标号为 0 的顶点不在 K_n 中，则标号 $|E|$的顶点必在 K_n 中，在与 θ同构的 θ^* 下该点的标号是 0⒀

定理 2　当 $n=11$ 时，$I_2(K_n)$ 是优美图；当 $12\leqslant n\leqslant 15$ 时，$I_2(K_n)$ 不是优美图⒀

证明　我们可以给出 $I_2(K_{11})$ 的一个标号 θ如下：

0	1	4	10	18	30	43	54	70	75	77
72	65	19	32	49	67	2	3	21	13	16
68	64	23	38	53	76	5	6	14	17	22

其中，第 1 行是 K_{11} 中 11 个顶点的标号⒀K_{11} 的点的标号下的 2 个数分别是与该点邻接的

收稿日期：1998-06-09　　谢文华，男，1947 年生，讲师

2 个悬挂点的标号⒀不难验证，θ是 $I_2(K_{11})$ 的优美标号⒀当 $12\leqslant n\leqslant 15$ 时，$I_2(K_n)$ 不是优美图的证明十分冗长，在短文中无法详述，我们在附注中给出它的证明要点和证明中主要用到的方法，此处不再赘述⒀

由定理 1 和定理 2 得到下面的定理⒀

定理 3 $I_2(K_n)$ 是优美图的充分必要条件是 $n\leqslant 11$⒀

于是，完全图的 2-冠图的优美性已经完全解决了⒀

附注 若 $I_2(K_{12})$ 是优美图，则有优美标号 θ，由引理知，在 K_{12} 中必有一个顶点标号为 0，且 K_{12} 中任 2 个顶点的标号不相同，任 2 条边的标号也不相同⒀我们在 K_{12} 中可以找到一条边数为 11 的通路，该通路的顶点的标号是由小到大，记此通路为 $v_1e_1v_2\cdots v_{12}$，其中 $\theta(v_1)=0$，$\theta(v_k)<\theta(v_{k+1})$ $K=1,2,\cdots,11$，$\theta(v_{12})\leqslant 90$⒀我们按 v_2 和 v_{12} 的标号分类，进行分析，得到在同构意义下，K_{12} 的顶点只有 1 种标号 $\{0,4,18,26,35,37,38,62,67,77,83,90\}$才可以满足引理⒀但是在这种标号下，$K_{12}$ 的边中缺少边标号为 74、75、76、78、80、81、82、84、85、87、88、89 等 12 条边，而且只能在顶点标号为 0、14、77、83、90 这 5 个顶点处产生，但是它是最多能产生 10 条，因此这个标号不是 $I_2(K_{12})$ 的优美标号⒀下面以一个例子来说明我们在证明定理 2 中所采用的分析方法⒀

例 如果 θ是 $I_2(K_{12})$ 的 1 种标号，K_{12} 中的顶点有标号 0、1、3、7、12，则 θ不是 $I_2(K_{12})$ 的优美标号⒀

证明 在 K_{12} 中顶点标有 0、1、3、7、12，则 K_{12} 中必有标号为 1、2、3、4、5、7、9、11、12 的边，于是有 $\sum_{k=5}^{11}\theta(v_{k+1})-\theta(v_k)\geqslant 6+8+13+14+15+16=82$，因此 $\theta(v_{12})\geqslant\theta(v_5)+82=94$，与 $\theta(v_{12})\leqslant 90$ 矛盾，所以 θ不是 $I_2(K_{12})$ 的优美标号⒀

当 $n=13$、14、15 时，采用与证明 $I_2(K_{12})$ 不是优美图相类似的方法，可以证明 $I_2(K_n)$ 不是优美图⒀

参 考 文 献

1 马克杰，优美图. 北京：北京大学出版社，1991，10

2 吴湃敏. 完全图冠的优美性. 华东交通大学学报，1995，2：68～71

The Gracefulness of the 2-Crown Complete Graphs

Xie Wenhua

(Adult Education School)

Abstract Let $I(K_n)$ denote the 2-crown complete graph K_n. In this paper, we prove that $I_2(K_n)$ is graceful if and only if $n\leqslant 11$.

Key words complete graph; crown; graceful graph.