

文章编号: 1005-0523(1999)01-0072-06

方程 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = b$ 的算法与程序

周尚超

(华东交通大学基础课部, 江西 南昌 330013)

摘要: 给出了方程 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = b$ 的算法与程序, 输入 m, b 和 x_i 就可得方程的解^[13]

关键词: 线性方程; 算法; 程序

中图分类号: O 157.1 **文献标识码:** A

许多实际问题可归结为求方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = b \quad a_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, b > 0 \quad (1)$$

的非负整数解, 当 m 较大 (> 2) 时, 手算是难以求解的^[13]

例 1 1992 年全国大学生数学建模竞赛题 B 题:

生命蛋白质是由若干种氨基酸的不同组合构成的, 各种氨基酸的分子量为 a_1, a_2, \dots, a_m 如下: $m = 18, a_1 \sim a_{18} = 57, 71, 81, 97, 99, 101, 103, 113, 114, 115, 128, 129, 131, 137, 147, 156, 163, 186$ ^[13] 给定某一蛋白质分子量 b (≤ 1000), 设定数学模型给出蛋白质所有可能组成, 即可确定该蛋白质是由哪几种氨基酸组成以及每种氨基酸的数目^[13]

这个问题就是要求方程 (1) ($m = 18, b = 1\ 000$) 的所有非负整数解, 文献[1]中给出, 当 $b = 1\ 000$ 时所有解的个数是 28 268, 计算时间是 810s, 当 b 值每增加 100 时, 解的个数, 时间将增加为原来的 3 倍^[13]

例 2 将一元钱分为零钱, 共有多少种方法, 就是要求方程 $50x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 2x_5 + x_6 = 100$ 的所有非负整数解^[13]

一般说来, 对这类问题, 当未知数的个数 m 不同时, 要根据不同的方程求解^[13]

我们编制了一个求解该类方程的通用程序, 只要输入 m, b, x_i ($i = 1, \dots, m, 1 < m < 26$), 就得出方程 (1) 的所有非负整数解^[13] 对于蛋白质问题, 当 $b = 1\ 000$ 时, 只要 6 秒就求出所有 28 268 个解 (486DLC 计算机)^[13]

定义 1 在解方程 (1) 时, 给出一组数 x_1, x_2, \dots, x_m , 判断它是否一个解, 称为进行了一次计算^[13]

定义 2 如果 $a_i \leq a_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m - 1$, 则称方程的系数满足升序条件^[13]

定义 3 如果 $a_i \geq a_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m - 1$, 则称方程的系数满足降序条件^[13]

我们以求解方程

收稿日期: 1998-07-03

基金项目: 江西省自然科学基金资助课题

中国知网 <https://www.cnki.net>

作者简介: 周尚超 (1948-), 男, 云南蒙自人, 华东交通大学基础课部教授^[13]

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = b \quad a_1 = 57, a_2 = 71, a_3 = 81, b = 1\ 000$$

为例,讨论快速算法

用计算机语言(BASIC 语言)编制的程序如下

$$\max x_1 = b \setminus a_1; \quad \max x_1 = 17 = 1000 \setminus 57;$$

$$\max x_2 = b \setminus a_2; \quad \max x_2 = 1000 \setminus 71;$$

$$\max x_3 = b \setminus a_3; \quad \max x_3 = 12 = 1\ 000 \setminus 81$$

```
FOR x 1=0 TO maxx 1
```

```
FOR x 2=0 TO maxx 2
```

```
FOR x 3=0 TO maxx 3
```

```
IF a 1 * x 1 + a 2 * x 2 + a 3 * x 3 = 1 000 THEN
```

```
    K = K + 1
```

```
    PRIT x 1; x 2; x 3; K
```

```
NEXT x 3
```

```
NEXT x 2
```

```
NEXT x 1
```

x_1, x_2 和 x_3 分别可取 18, 15 和 13 个值, 计算机要进行 $18 \times 15 \times 13 = 3\ 510$ 次运算

将程序改进如下

```
FOR x 1=0 TO maxx 1
```

```
FOR x 2=0 TO maxx 2
```

```
    b 2 = b - a 1 * x 1 + a 2 * x 2
```

```
    if b 2 mod a 3 = 0 and b 2 >= 0 then
```

```
        x 3 = b 2 / a 3
```

```
        K = K + 1
```

```
        PRIT x 1; x 2; x 3; K
```

```
    end if
```

```
NEXT x 2
```

```
NEXT x 1
```

计算机只进行 $18 \times 15 = 270$ 次运算

再将程序改进如下

```
FOR x 1=0 TO maxx 1
```

```
    b 1 = b - a 1 * x 1
```

```
    * * * * *
```

```
    maxx 2 = b 1 \ a 2
```

```
FOR x 2=0 TO maxx 2
```

```
    b 2 = b - a 2 * x 2
```

```
    if b 2 mod a 3 = 0 then
```

```
        x 3 = b 2 \ a 3
```

```
        K = K + 1
```

PRINT x 1;x 2;x 3;K

end if

NEXT x 2

xx 1: NEXT x 1

计算机只要进行 141 次运算(13)这是因为, x 1=0 时, x 2 可取 0, 1, ..., 14 共 15 个值

x 1=1 时, x 2 可取 0, 1, ..., 13 共 14 个值, 当 x 1 增加时, x 2 可取值减少, 即

x 1 取值	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
x 2 取值个数	15	14	13	12	11	11	10	9	8	7	7	6	5	4	3	3	2	1
x 2 取值个数合计	141																	

注意到 a 1<a 2<a 3, 如果将其改为 a 1>a 2>a 3, 即令 a 1=81, a 2=71, a 3=57, 则运算减少为 100 次, 即

x 1 取值	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x 2 可取值个数	15	13	12	11	10	9	8	7	5	4	3	2	1
x 2 取值个数合计	100												

考虑到 57 与 81 的最大公因数是 3, 如果将系数重排

$$a 1 = 71, a 2 = 81, a 3 = 57(13)$$

则给定 x 1 后, b-a 1 * x 1 应是 3 的倍数, 因此在 0-14(14=b/z 1) 这 15 个数中, x 1 只能取 2, 5, 8, 11, 14 这 5 个数, 将上述程序中的

* * * * *

改为 IF B 1 mod 3<> 0 THEN goto xx 1

总的计算次数减少为 29 次(13)

总结, 要解方程(*), 需要用 m-1 重循环, 第一个循环变量 x 1 的取值从 0 到 b \ a 1 第 i+1 个循环变量 x i 的取值从 0 到 [b-(a 1 x 1+a 2 x 2+...+ a i x i)]/a i+1

如果将系数 a i 设置为降序 a 1>=a 2>=...>=a m 计算次数大大减少(13)

例 2 关于蛋白质氨基酸分解问题的运算结果(用 486DLC 计算机 QUICK BASIC 语言)

系数	计算次数	计算时间(s) 解释型	计算时间(s) 编译型
升序	2 444 324 次	228	20
降序	1 230 387 次	63	6
利用公因数	4 138 50 次	27	2

如果将系数 a 1~a 18 重新排序如下

$$a 1 \sim a 10 = 163, 137, 131, 128, 115, 113, 103, 101, 97, 71$$

$$a 11 \sim a 18 = 186, 156, 147, 129, 114, 99, 81, 57$$

注意到 a 11~a 18 这 6 个数的最大公因数是 3, 利用这一点, 计算次数减少为 413 850 次, 计算时间减少为 27 s(解释型)和 2 s(编译型)(13)

程序

DEFINT A-Z:CLS

DIM a(30),x(30),b(30)

```

solve equation  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = b$ 
INPUT "input m", m
INPUT "input b", b
FOR i = 1 TO m
  INPUT "input a1 TO am", a(i)
  PRINT "a(" ; i ; ") = " a(i)
NEXT i
t1$ = TIME$
mx1 = b/a(1)
FOR x1 = 0 TO mx1: x(1) = x1: b(1) = b - a(1) * x: mx2 = b(1) \ a(2)
  IF m = 2 THEN GOSUB 1000: GOTO 1
FOR x2 = 0 TO mx2: x(2) = x2: b(2) = b(1) - a(2) * x2: mx3 = b(2) \ a(3)
  IF m = 3 THEN GOSUB 1000: GOTO 2
FOR x3 = 0 TO mx3: x(3) = x3: b(3) = b(2) - a(3) * x3: mx4 = b(3) \ a(4)
  IF m = 4 THEN GOSUB 1000: GOTO 3
FOR x4 = 0 TO mx4: x(4) = x4: b(4) = b(3) - a(4) * x4: mx5 = b(4) \ a(5)
  IF m = 5 THEN GOSUB 1000: GOTO 4
FOR x5 = 0 TO mx5: x(5) = x5: b(5) = b(4) - a(5) * x5: mx6 = b(5) \ a(6)
  IF m = 6 THEN GOSUB 1000: GOTO 5
FOR x6 = 0 TO mx6: x(6) = x6: b(6) = b(5) - a(6) * x6: mx7 = b(6) \ a(7)
  IF m = 7 THEN GOSUB 1000: GOTO 6
FOR x7 = 0 TO mx7: x(7) = x7: b(7) = b(6) - a(7) * x7
  IF m = 8 THEN GOSUB 1000: GOTO 7
  mx8 = b(7) \ a(8)
FOR x8 = 0 TO mx8: x(8) = x8: b(8) = b(7) - a(8) * x8
  IF m = 8 THEN GOSUB 1000: GOTO 7
  mx8 = b(7) \ a(9)
FOR x9 = 0 TO mx9: x(9) = x9: b(9) = b(8) - a(9) * x9
  IF m = 9 THEN GOSUB 1000: GOTO 8
  mx10 = b(9) \ a(10)
FOR x10 = 0 TO mx10: x(10) = x10: b(10) = b(9) - a(10) * x10
  IF m = 11 THEN GOSUB 1000: GOTO 10
  mx11 = b(10) \ a(11)
FOR x11 = 0 TO mx11: x(11) = x11: b(11) = b(10) - a(11) * x11
  IF m = 12 THEN GOSUB 1000: GOTO 11
  mx12 = b(11) \ a(12)
FOR x12 = 0 TO mx12: x(12) = x12: b(12) = b(11) - a(12) * x12
  IF m = 13 THEN GOSUB 1000: GOTO 12

```

$mx_{13} = b(11) \setminus a(13)$

FOR $x_{13} = 0$ TO $mx_{13}; x(13) = x_{13}; b(13) = b(12) - a(13) * x_{13}$

IF $m = 14$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 13

$mx_{14} = b(13) \setminus a(14)$

FOR $x_{14} = 0$ TO $mx_{14}; x(14) = x_{14}; b(14) = b(6) - a(14) * x_{14}$

IF $m = 15$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 14

$mx_{15} = b(14) \setminus a(15)$

FOR $x_{15} = 0$ TO $mx_{15}; x(15) = x_{15}; b(15) = b(14) - a(15) * x_{15}$

IF $m = 16$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 15

$mx_{16} = b(15) \setminus a(16)$

FOR $x_{16} = 0$ TO $mx_{16}; x(16) = x_{16}; b(16) = b(15) - a(16) * x_{16}$

IF $m = 17$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 16

$mx_{17} = b(16) \setminus a(17)$

FOR $x_{17} = 0$ TO $mx_{17}; x(17) = x_{17}; b(17) = b(16) - a(17) * x_{17}$

IF $m = 18$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 17

$mx_{18} = b(17) \setminus a(18)$

FOR $x_{18} = 0$ TO $mx_{18}; x(18) = x_{18}; b(18) = b(17) - a(18) * x_{18}$

IF $m = 19$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 18

$mx_{19} = b(18) \setminus a(19)$

FOR $x_{19} = 0$ TO $mx_{19}; x(19) = x_{19}; b(19) = b(18) - a(19) * x_{19}$

IF $m = 20$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 19

$mx_{20} = b(19) \setminus a(20)$

FOR $x_{20} = 0$ TO $mx_{20}; x(20) = x_{20}; b(20) = b(19) - a(20) * x_{20}$

IF $m = 21$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 20

$mx_{21} = b(19) \setminus a(20)$

FOR $x_{21} = 0$ TO $mx_{21}; x(21) = x_{21}; b(21) = b(20) - a(21) * x_{21}$

IF $m = 22$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 21

$mx_{22} = b(21) \setminus a(22)$

FOR $x_{22} = 0$ TO $mx_{22}; x(22) = x_{22}; b(22) = b(21) - a(22) * x_{22}$

IF $m = 23$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 22

$mx_{23} = b(22) \setminus a(23)$

FOR $x_{23} = 0$ TO $mx_{23}; x(23) = x_{23}; b(23) = b(22) - a(23) * x_{23}$

IF $m = 24$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 23

$mx_{24} = b(23) \setminus a(24)$

FOR $x_{24} = 0$ TO $mx_{24}; x(24) = x_{24}; b(24) = b(23) - a(24) * x_{24}$

IF $m = 25$ THEN GOSUB 1 000;GOTO 24

$mx_{25} = b(24) \setminus a(25)$

```

24 NEXT :                23 NEXT
22 NEXT :                21 NEXT
20 NEXT :                19 NEXT
18 NEXT :                17 NEXT
16 NEXT :                15 NEXT
14 NEXT :                13 NEXT
12 NEXT :                11 NEXT
10 NEXT :                9 NEXT
8 NEXT :                 7 NEXT
6 NEXT :                 5 NEXT
4 NEXT :                 3 NEXT
2 NEXT :                 1 NEXT
PRINT "start time = "; t1$ "end time = "; TIME$; "solve = "; k
END
1000 IF b(m-1) MOD a(m) <> 0 THEN RETURN
      x(m) = b(m-1) \ a(m); k = k + 1
      IF k MOD 2000 = 1 THEN
        FOR l = 1 TO m; PRINT x(l); ;NEXT; PRINT k
      END IF
RETURN

```

[参 考 文 献]

- [1] 程龙, 张云军, 赵蕊¹⁹蛋白质氨基酸的组成问题[J]¹⁹数学的实践与认识, 1993, (3); 86~94

The Algorithm and Programming of Linear Equation

ZHOU Shang-chao

(Basic Courses Department, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper gave the algorithm and programming of linear equation: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = b$.

Key words: linear equation; algorithm; programming