**文章编号:**1005-0523(1999)02-0072-03

# 关于图的边函数控制数的注记

徐 保 根

(华东交通大学 基础课部,江西 南昌 330013)

**摘要:**给出了图的边函数控制数的一个下界。特殊地,证明了 $n$ 阶正则图的边函数控制数 $\gamma_s'(G)\geqslant 0$,同时也指出了文[1]中两个定理的错误。

**关 键 词:**图;正则图;边控制函数;边函数控制数

**中图分类号:**O 157.5　　**文献标识码:**A

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号、术语同文献[1,2]。

设 $G$ 为一个图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 $G$ 的顶点集和边集。若 $v\in V(G)$,则 $N(v)$ 表示 $v$ 点的邻域,$N[v]=N(v)\cup\{v\}$ 为闭邻域。$d_G(v)$ 表示 $v$ 点在 $G$ 中的度。$\Delta$ 与 $\delta$ 分别为 $G$ 的最大度和最小度。若 $e=uv\in E(G)$,则 $N(e)$ 表示 $e$ 的邻边组成的集合,$d(e)=|N(e)|=d(u)+d(v)-2$ 表示 $e$ 的边度,$N[e]=N(e)\cup\{e\}$ 为 $e$ 的闭边邻域。图 $G$ 的最大边度记为 $\Delta'(G)$,即 $\Delta'(G)=\max\{d(e)\mid e\in E(G)\}$。类似地最小边度为 $\delta'(G)$。

**定义 1**[1] 对图 $G(V,E)$,若映射 $f:E\to\{-1,1\}$ 使得对 $\forall e\in E$,均有

$$\sum_{e'\in N[e]} f(e')\geqslant 1$$

成立,则称 $f$ 为图 $G$ 的一个边控制函数。并称

$$\gamma_s'(G)=\min\Big\{\sum_{e\in E} f(e)\ \Big|\ f\ 为\ G\ 的边控制函数\Big\}$$

为 $G$ 的边函数控制数。

对于图的点函数控制数(也称符号控制数)可类似地定义[3]。并且已有不少的结果[3,5]。但对于图的边函数控制数,目前已知的结果甚少,本文首先给出图的边函数控制数的一个下界。注意到一个图的边函数控制数可能为负值,例如:$H$ 表示在 $K_n(n\geqslant 4)$ 的各顶点均增加 $n-2$ 条悬挂边所得的 $n+n(n-2)$ 阶图,若定义 $H$ 的一个边控制函数如下:$\forall e\in E(H)$,

$$f(e)=\begin{cases}1 & e\in E(K_n)\\ -1 & e\notin E(K_n)\end{cases}$$

因此有 $\gamma_s'(H)\leqslant\sum_{e\in E(H)} f(e)=\binom{n}{2}-n(n-2)<0$

**定理 1** 对任意 $n$ 阶图 $G$,若 $|E(G)|=m$。则

$$\gamma_s'(G)\geqslant m-\frac{\Delta'+2}{4}n$$

**收稿日期:**1998-08-31;
**基金项目:**江西省自然科学基金资助项目(3000009702)
**作者简介:**徐保根(1963-),男,江西南昌人,华东交通大学副教授。

其中 轲表示图 $G$ 的最大边度⒀

证:由定义 1 知,存在 $G$ 的一个边控制函数(映射)$f:E(G)\rightarrow\{-1,1\}$,使得

$$\gamma_s'(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)$$

令 $E^+=\{e\in E(G)|f(e)=1\}$, $|E^+|=s$

$E^-=\{e\in E(G)|f(e)=-1\}$, $|E^-|=t$

显然 $E^+\cup E^-=E(G)$, $E^+\cap E^-=\varnothing$, $s+t=m$⒀

并且 $\gamma_s'(G)=s-t$

取 $G$ 的一个(生成)子图 $G_1$, $V(G_1)=V(G)$,且 $E(G_1)=E^-$, $G_1$ 的度序列记为:$d_1,d_2,\cdots,d_n$⒀显然 $d_1+d_2+\cdots+d_n=2|E(G_1)|=2t$, $d(e)$ 表示 $e$ 在 $G_1$ 中的边度,即 $d(e)=d(u)+d(v)-2$　$(uv\in E(G_1))$

$$\sum_{e\in E(G_1)}d(e)=\sum_{uv\in E(G_1)}(d(u)+d(v)-2)=\sum_{uv\in E(G_1)}(d(u)+d(v))-2t$$

在上式右端求和时,在 $G_1$ 中每个点 $u$ 的度 $d(u)$ 恰好取 $d(u)$ 次⒀从而有

$$\sum_{e\in E(G_1)}d(e)=\sum_{i=1}^{n}d_i^2-2t\geqslant n\left(\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{n}\right)^2-2t=\frac{4t^2}{n}-2t$$

因此,至少存在 $G_1$ 的一条边 $e_o$,使得在 $G_1$ 中有

$$d(e_o)\geqslant\frac{4t}{n}-2$$

即 $e_o$ 边在 $G_1$ 中的闭边邻域 $N_{G_1}[e_o]$ 中至少有 $\frac{4t}{n}-1$ 条边(在 $f$ 下均取值 $-1$)⒀因此 $e_o$ 边在 $G$ 中至少要与 $f$ 下取 $+1$ 的 $4t/n$ 条边相邻,才能使得:

$$\sum_{e'\in N[e_o]}f(e')\geqslant 1$$

即在图 $G$ 中,与 $e_o$ 相邻的边数 $d(e_o)\geqslant\frac{4t}{n}-2+\frac{4t}{n}=\frac{8t}{n}-2$. 轲$(G)\geqslant d(e_0)\geqslant\frac{8t}{n}-2$

得出:$t\leqslant$(轲$'+2)n/8$⒀因此,我们有

$$\gamma_s'(G)=s-t=m-2t\geqslant m-\frac{\text{轲}'+2}{4}n$$

**定理** 1 证毕⒀

显然对任何图 $G$,均有 轲$(G)\leqslant 2$轲$(G)-2$⒀且当 $G$ 为正则图时 轲$(G)=2$轲$(G)-2$(只需 $G$ 的两个最大度点相邻时成立)⒀因此我们有

**推论** 1　对任意 $n$ 阶图 $G$, $|E(G)|=m$,轲为 $G$ 的最大度,则 $\gamma_s'(G)\geqslant m-\frac{\text{轲}}{2}n$

**推论** 2　任意正则图的边函数控制数 $\gamma_s'(G)\geqslant 0$

上述定理给出了图的边函数控制数的下界⒀但对于一般图 $G$,要确定 $\gamma_s'(G)$ 的值仍是困难的⒀文[1]中对完全图 $K_n$,确定了 $\gamma_s'(K_n)$ 的值⒀但其对 3-正则和 4-正则图的结论是错误的⒀

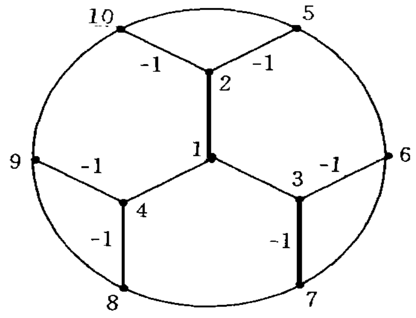
**引理** 1[1]对 $2n$ 阶无割边的 3-正则图 $G$,均有 $\gamma_s'(G)=n$⒀

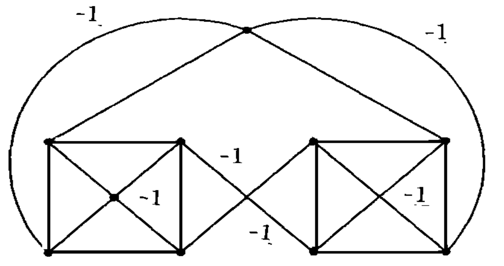
**引理** 2[2]对 $2n$ 阶 3-边连通的 4-正则图 $G$, $\gamma_s'(G)=2n$



上述两引理为文[1]中的定理 1 和定理 2,其证明中断言:对 3-正则图(或 4-正则图),

其任一边控制函数都有这样的特点，任一顶点相关联的 3 条边( 4 条边) 最多只能有一条边取 $-1$⒀事实上并非如此⒀图( 1) 和图( 2) 所示⒀其中图中未标号的边均为 $+1$⒀




图( 1) 图 $G_1$　　图( 2) 图 $G_2$

图 $G_1$ 为 10 阶无割边的 $3-$正则图，上述标号显示 $\gamma_s'(G_1)\leqslant 3$⒀图 $G_2$ 为 10 阶 $3-$边连通的 $4-$正则图⒀$\gamma_s'(G)\leqslant 8$⒀因此，上述两引理不真⒀


## [ 参 考 文 献 ]

[1] 刘林忠，张忠辅．图的边函数控制数[J]．华东交通大学学报，1( 1998)．61－63

[2] J·A·Bondy and U·S·R·Murty，Graph Theory with applications[M]，Macmillan，London，1977

[3] Johannes H·Hattlngh，Elna Ungerer，The signed Qnd mlnus R-subdomination numbers of comets[J]，Discrete Math·183( 1998) 141－152

[4] E·J·Cockayne，C·M·Mynhardt，On a generalisation of siged，domination function of graphs[M]，Ars·Combin·43( 1996) 235－245

[5] I·Broere，J·H·Hattingh，M·A·Henning，A·A·McRac，Majority dominatwn in graphs[J]，Discrete Math·138( 1995) 125～135


# On Edge Function Dornination Numbers of Graphs


**XU Bao-gen**

( Basic Courses Department East China Jiaotong Univevsity Nanchang 330013，china)



**Abstract:** In this paper we give a lower bound for the edge function domination numbers of graphs·As a special case，we prove that $\gamma_s'(G)\geqslant 0$ for any regular graph G，and show that the two results in [1]are not true



**Key words:** graph；regular graph；edge domination function；edge function domination number