

文章编号:1005-0523(1999)03-0001-06

# 非结构网格上二维欧拉方程的多重网格解

刘 星<sup>1</sup>, 卞恩荣<sup>1</sup>, 童谷生<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学 飞机系, 江苏 南京 210016; 2. 华东交通大学 土木工程学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:**介绍了在非结构三角形网格上对欧拉方程进行有限体积离散的一种方法。通过运用一系列彼此独立的粗细不同的非结构网格,即多重网格算法,加速了欧拉方程解的收敛。计算了绕二维多段翼型的层流和紊流问题。计算结果与低马赫数下的位流解和低粘性影响的实验结果进行了比较。结果显示多重网格算法是一种十分有效的算法。

**关键词:**非结构网格;多重网格;中心格式

**中图分类号:** V211.3 **文献标识码:** A

## 0 引言

近年来人们对跨音速欧拉方程的定常解进行了大量研究。在四边形的结构网格上对简单外形物体的二、三维问题已获得了精确且有效的解。但对于复杂外形的物体却未能获得满意的结果。其主要原因在于难以获得绕复杂外形物体的高质量网格。人们已经提出了许多解决此困难的方法,如混合型网格<sup>[1]</sup>和网格的自适应<sup>[2]</sup>。但所有的这些方法都有一个共同的特性,即以流场计算的复杂性来减低网格生成的复杂性。

由于适于处理复杂边界并且易采用自适应技术,非结构三角形网格经常在有限元的研究中使用。然而在非结构网格上的解往往不如在结构网格上的解有效。这是因为其结构的无规律性,网格间的关系必须储存起来,相邻单元间的这种关系较复杂。由 Mavriplis 等提出的非结构多重网格法<sup>[3]</sup>,可以提高解的有效性。笔者将该方法与 Delaunay 网络的生成法和欧拉方程在非结构网格上的中心格式解相结合,进行了探讨。

## 1 网格生成

非结构网格生成采用了 Delaunay 方法,网格的生成分 3 个步骤:

1) 在整个流场上布点。按照保角变换技术构造四边形结构网格,做一定的处理后取其节点,并将翼型内的节点删除,就得到流场内的节点分布。

2) 将这些节点按照 Delaunay 准则构造成三角形网格,该准则规定任何三角形的外接圆不能包含其它节点。

3) 当所有节点都已引入完毕,为了提高网格单元的质量,还需对已经形成的三角形

网格进行光滑<sup>19</sup>。笔者采用简单的 Laplacian 迭代进行光滑<sup>19</sup>。新的节点位置由以下公式确定

$$\begin{aligned}x_i^{\text{new}} &= x_i^{\text{old}} + \frac{w}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - x_i); \\y_i^{\text{new}} &= y_i^{\text{old}} + \frac{w}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - y_i),\end{aligned}$$

其中:  $w$  是松弛因子, 一般取 0.2, 迭代次数为 100 至 200<sup>(13)</sup>

## 2 方程的离散

需要获得的流场参数为压力、密度、速度、总能和总焓, 分别表示  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $E$  和  $H$ , 因为对于完全气体, 我们有

$$E = \frac{p}{(r-1)\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2); \quad H = E \frac{p}{\rho},$$

其中:  $r$  为比热比, 我们只需要解 4 个参数  $\rho$ ,  $\rho u$ ,  $\rho v$ ,  $\rho E$ <sup>(13)</sup> 这些参数可以通过解如下积分形式的欧拉方程获得<sup>(13)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} w \, dx \, dy + \iint_{\partial\Omega} (f \, dy - g \, dx) = 0, \quad (1)$$

其中:  $x, y$  为笛卡尔坐标, 解和通量为

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{bmatrix}; \quad g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{bmatrix} \quad (13)$$

$\Omega$  为边界是  $\partial\Omega$  的任意控制体<sup>(13)</sup>

将方程 (1) 在每个网格上进行离散化求解, 采用中心格式<sup>(13)</sup> 中心格式将三角形单元作为控制体, 并将流场变量储存于每个控制体中心, 视其为该控制体的平均值<sup>(13)</sup>

## 3 人工粘性<sup>[4]</sup>

为了防止在激波附近出现振荡, 必须构造人工粘性项<sup>(13)</sup> 在非结构网格上, 可以构造一个由拉普拉斯算子和双调和算子混合成的人工粘性算子, 对于中心格式, 拉普拉斯算子

$$\nabla^2 w_i = \sum_{k=1}^3 w_k - 3w_i \quad (2)$$

为了与有限体积分一致, 粘性算子可以看成是粘性通量的和, 即

$$D(w_i) = \sum_{k=1}^3 d_{ik},$$

其中:  $d_{ik} = \epsilon[w_i - w_k] - \epsilon[\nabla^2 w_i - \nabla^2 w_k]$

上式中的第 1 项是对拉普拉斯算子的积分, 因此是一个有效的一阶精度的粘性项<sup>(13)</sup> 这一粘性项对于防止解在激波附近发生振荡是十分重要的<sup>(13)</sup>  $\epsilon$  是自适应系数, 上式中第 2 项是对双调

和算子的积分,系数  $\epsilon$  为一个经验值,是一个小量<sup>[13]</sup>

## 4 时间推进格式

对欧拉方程的空间离散,使方程(1)变为

$$S_i \frac{dw_i}{dt} + [Q(w_i) - D(w_i)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

其中: $S_i$  为控制体的面积<sup>[13]</sup>使用显式五步混合时间步长格式对这些方程进行积分

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= w^{(n)}; \\ w^{(1)} &= w^{(0)} - \frac{1}{4} \Delta t / s [Q(w^{(0)}) - D(w^{(0)})]; \\ w^{(2)} &= w^{(0)} - \frac{1}{6} \Delta t / s [Q(w^{(1)}) - D(w^{(1)})]; \\ w^{(3)} &= w^{(0)} - \frac{3}{8} \Delta t / s [Q(w^{(2)}) - D(w^{(2)})]; \\ w^{(4)} &= w^{(0)} - \frac{1}{2} \Delta t / s [Q(w^{(3)}) - D(w^{(3)})]; \\ w^{(5)} &= w^{(0)} - \Delta t / s [Q(w^{(4)}) - D(w^{(4)})]; \\ w^{(n+1)} &= w^{(5)}, \end{aligned}$$

其中: $w^{(n)}$  和  $w^{(n+1)}$  是第  $n$  步时间上的初值和终值<sup>[13]</sup>

## 5 非结构多重网格算法

多重网格算法是加速流场定常数值解收敛的有力工具<sup>[13]</sup>其基本思想就是将数值解在粗网格上按时间步长推进,将所得结果作为细网格上解的修正<sup>[13]</sup>在粗网格上进行时间推进有两方面的优点<sup>[13]</sup>首先,允许的时间步长大,因为时间步长的大小与网格尺寸是成正比的;其次,因为粗网格上节点数要比细网格上少得多,所以计算工作量也就少得多<sup>[13]</sup>但是,该算法也有弱点<sup>[13]</sup>因为粗网格不能通过细网格合并的方法来实现,而通过将粗网格重划分来生成细网格,又会打破原有的网格拓扑关系<sup>[13]</sup>因此,多重网格算法只能建立在一系列彼此间无任何联系的粗、细网格上,实际上多重网格算法的粗细网格间无任何联系,仅仅是变量在不同网格间发生传递<sup>[13]</sup>

从细网格到粗网格间数据的传递使用了面积加权函数<sup>[13]</sup>假设  $s_{fc}$  代表粗、细网格单元重叠部分的面积,见图 1<sup>[13]</sup>粗网格上的变量由下式确定

$$w_c = \sum_{i=1}^n \frac{w_f s_{fc}}{s_c} \quad (4)$$

其中: $w_c$  为面积是  $s_c$  的粗网格单元上的流场变量值, $w_f$  是每个细网格上的流场变量值, $n$  为细网格数<sup>[13]</sup>与此相似,粗网格上的残值由下式确定

$$R_c = \sum_{i=1}^n \frac{w_f s_{fc}}{s_c} \quad (5)$$

$$c_f = \sum_{i=1}^m \frac{C_i S_{f_i}}{S_f} \quad (6)$$

其中:  $c_f$  为面积是  $S_f$  的细网格单元上的转换修正值;  $m$  为粗网格数<sup>[13]</sup>

以上的转换公式中, 求和都是针对粗、细网格的所有单元进行的, 在实际应用时, 只需对那些相交面积不为零的单元进行<sup>[13]</sup>因此网格间参数的转换关键在于确定网格的相交部分面积<sup>[13]</sup>如果对所有的粗网格搜索一遍, 其计算量为  $O(N^2)$ , 此处  $N$  为网格的节点数, 计算量是无法接受的<sup>[13]</sup>因此, 本文采用了树型结构算法<sup>[13]</sup>它要求无论是粗网格还是细网格, 其相邻单元间的关系和相邻节点的关系都必须储存起来<sup>[13]</sup>以供搜索时使用<sup>[13]</sup>

多重网格算法的第 1 步是按前面所述的 Delaunay 方法生成几套非结构网格, 并且尽量使较粗的网格节点数是前一较细的网格节点数的四分之一<sup>[13]</sup>第 2 步是计算并储存网格的传递系数<sup>[13]</sup>计算时第一个时间步长是在最细的网格上进行的, 然后将流场参数和残值传递到下一重粗网格上<sup>[13]</sup>假定  $w$  和  $R$  分别代表传递参数和残值, 在粗网格上可以定义一个强迫函数  $P = R - R(w)$ , 在粗网格上第  $q$  步时间步长时, 变量的表达式为  $w^{(q)} = w^{(q-1)} - a \Delta_t (R(w^{(q-1)}) + P)$ <sup>[13]</sup>在第 1 步时  $w^{(q-1)}$  这一项以流场传递变量  $w$  代替<sup>[13]</sup>这样, 在粗网格上的计算残值就被强迫函数的第 2 项抵销了, 在依次变粗的网格上重复上一过程, 在每一重网格上推进一个时间步长, 当到达最粗的网格后, 修正量再传回较细的一重网格上<sup>[13]</sup>

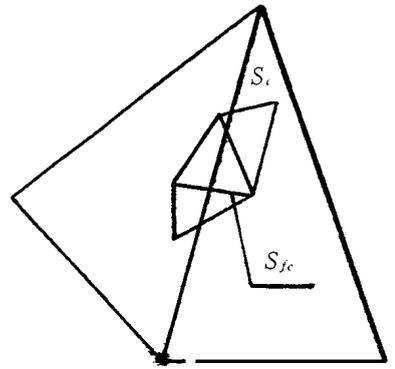


图 1 粗细网格的重叠区

## 6 算例

选定的第一个算例是选择 Karman-Treffitz 翼型, 迎角为零度, 副翼下垂十度, 马赫数取 0.125, 网格共有 5 486 个节点, 其中主翼上 128 个节点, 副翼上 100 个节点, 如图 2<sup>19</sup>图 3 为主翼和副翼的压力分布图, 其中离散点为计算值, 曲线为位流理论的解析解<sup>[5]</sup><sup>19</sup>.从曲线可以看出, 二者吻合的很好, 只是在尾部驻点处有一定的差异<sup>19</sup>此处如果将网格加密, 且后缘下垂角减小, 会得到较好的结果<sup>19</sup>.

第二个算例是与文献<sup>[6]</sup>中提到的实验值的比较, 迎角为 7.5 度, 马赫数为 0.5, 最细的网格有 5 629 个节点<sup>19</sup>最粗的网格有 114 个节点<sup>19</sup>图 4 为前缘缝翼和主翼上的压力分布图, 曲线为计算值, 离散点为实验值<sup>19</sup>.从曲线可以看出, 二者吻合的较好<sup>19</sup>.

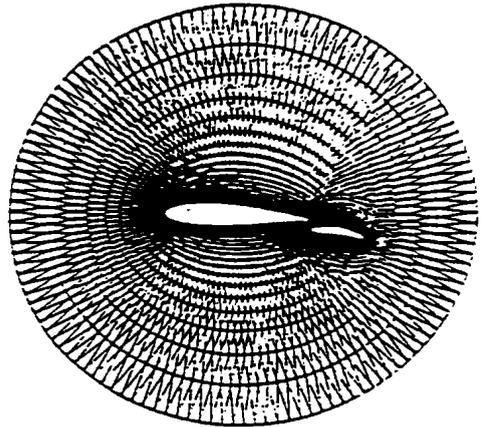


图 2 Kaman-Treffitz 翼型及副翼网格

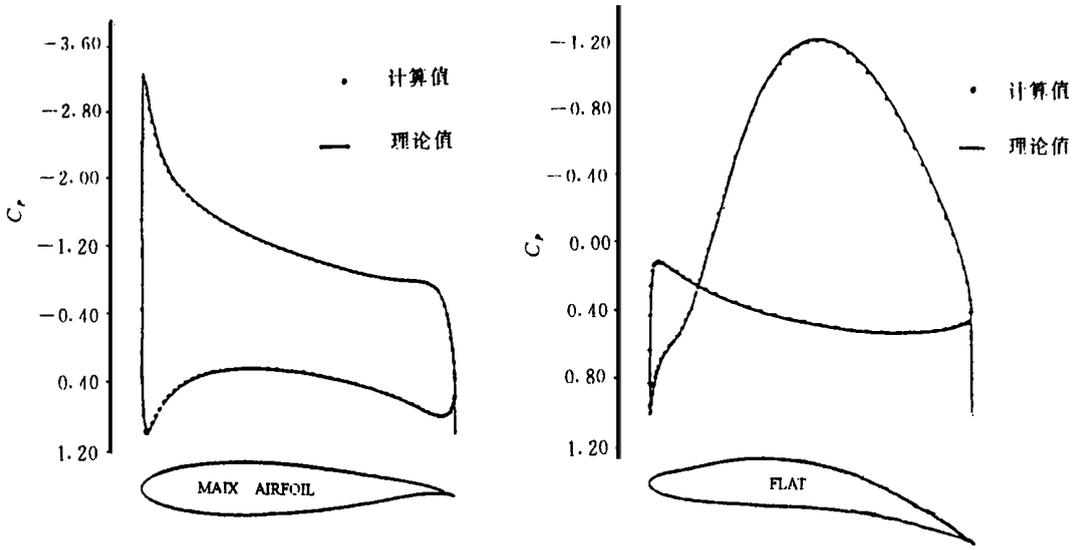


图3 Kaman-Treffitz 翼型及其副翼压力分布

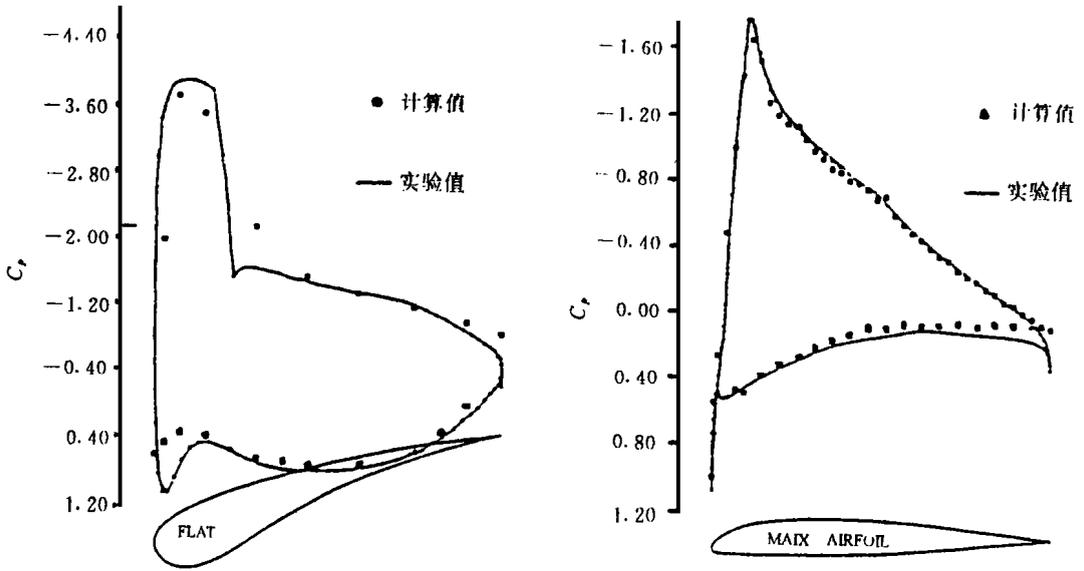


图4 实验翼型及其缝翼压力分布

## 7 结 论

通过以上算例证明多重网格算法在层流情况下与理论值吻合得很好,而在紊流低粘性时与实验值吻合得很好,并且收敛速度较快<sup>19</sup>。这些都说明非结构多重网格法是有效的<sup>19</sup>。但由于对人工粘性项的控制还不太好掌握,所以本方法还有待于与网格的自适应技术的粘流理论相结合,并加以完善<sup>19</sup>。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] VERMELAND R E. Solution of the two-dimensional Euler equations on a hybrid mesh. Princeton University, MAE Report 1679[C], 1984, 819.
- [2] DANENHOFFER J F, BARON J R. Rubust grid adaptation for complex transonic flows. AIAA Paper 86-0495[C], 198619.
- [3] MAVRIPLIS D, JAMESON A. Multigrid solution of the two-dimensional Euler equations on unstructured triangular meshes. AIAA-87-0353[C]19.
- [4] JAMESON A, SCHMIDT W, TURKEL E. Numerical solution of the euler equations by finite volume methods using runge-kutta time stepping schemes. AIAA Paper 81-1259[C], 198119.
- [5] WILLIAMS B R. An exact test case for the plane potential flow about two adjacent lifting airfoils, Aeronautical Research Council, R&M, No. 3717[C], 199319.
- [6] VOLPE G. A multigrid method for computing the transonic flow over two closely-coupled airfoil components, Paper presented at the 14 th ICAS Congress[C], Toulouse, France; 1984, 919.

## Multigrid Solution for the 2-D Euler Equations on Unstructured Meshes

LIU Xing<sup>1</sup>, BIAN En-tong<sup>1</sup>, TONG Gu-sheng<sup>2</sup>

(<sup>1</sup>. Aircraft Engineering Department, NUAA, Nanjing 210016, China; <sup>2</sup>. College of Civil Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** A finite volume discretization of the Euler equations on unstructured triangular meshes is presented. Convergence has been accelerated by an unstructured multigrid algorithm which operates on a sequence of completely unrelated unstructured coarse and fine meshes. Subcritical and supercritical flows are computed about multi-element airfoil configurations in two dimensions. The computation results are compared both with an exact potential flow solution for a low Mach number case and with experimental data for a case with small viscous effects. And it shows that the multigrid algorithm is very efficiently.

**Key words:** unstructured grid; multigrid; cell centered scheme