文章编号:1005-0523(1999)03-0031-03

用奇异函数法分析复杂载荷下实体三铰拱内力

王永祥，　童谷生，　黄晓生

(华东交通大学 土木建筑工程学院,江西 南昌　330013)

摘要: 用奇异函数法导出了实体三铰拱在复杂载荷作用下内力的解析解,与传统的数解法相比,由于用统一的解析式表达内力,便于编程计算,也便于根据已知外载情况合理地设计拱轴⒆

关　键　词: 奇异函数法;三铰拱;内力

中图分类号: TU 973.23　　　**文献标识码:** A

0　引　言

实体三铰拱为建筑中常见的一种结构形式,其内力的计算以及合理的拱轴设计是该类结构计算的重要内容⒀以往算法中采用的是数解法[1],其主要原因是当结构中作用载荷较复杂时,其内力需要分段计算⒀该方法计算内力时其精度受到点的选取的影响,且不易算出最大弯矩及其作用截面位置⒀采用奇异函数法计算,可得到内力的解析解表达式,不但简洁,而且易于编制计算程序⒀

1　实体三铰拱内力的数解法

为了得出解析解,先来分析实体三铰拱的数解法,设一三铰拱如图1所示⒀由[1]可知,若与拱轴线正交的截面 K 的形心坐标为 x_k, y_k 以及该拱轴的切线倾角为 Φ_k,则截面 K 的内力:弯矩 M_k,剪力 Q_k 和轴力 N_k 可以按下式计算

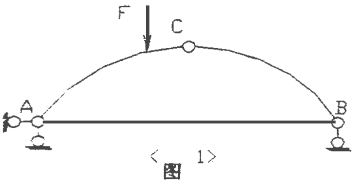

图1　实体三铰拱

$$M_k = M_k^0 - H y_k; \tag{1}$$

$$Q_k = Q_k^0 \cos \Phi_k - H \sin \Phi_k; \tag{2}$$

$$N_k = Q_k^0 \sin \Phi_k - H \cos \Phi_k \tag{3}$$

其中:M_k^0, Q_k^0 分别为相应简支梁在截面 K 处的弯矩和剪力;H 为拱推力⒀

另外,拱的合理轴线取决于下式

$$y = M^0 / H \tag{4}$$

如果 M^0, Q^0 为简支梁的弯矩和剪力,不管梁上荷载如何复杂,总可利用奇异函数求出其内力的解析表达式[2]⒀因此,亦可求出拱的内力的解析式,下面先讨论梁的复杂荷载作用下的内力的解析解⒀

收稿日期: 1999-02-28;**修订日期:** 1999-04-04

作者简介: 王永祥(1971-),男,安徽芜湖人,华东交通大学助教

2 用奇异函数法计算梁的内力

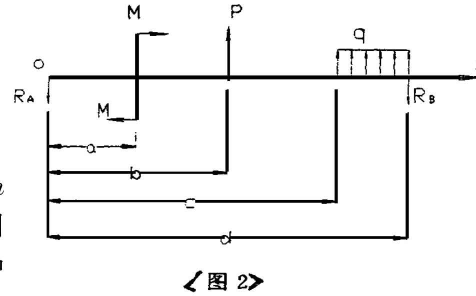

图 2 计算简图

若在梁上(如图 2)作用有 m 个集中力偶 M_i,n 个集中力 P_i,l 个分段均布荷载 q_i⒀设 M_I,P_I 的作用点分别为 a_I,b_I,q_I 的起点和终点分别为 c_I 和 d_I,其中 p_I 中包括支座反力,M_I 包括支座反力偶,利用奇异函数可写出全梁上外力的线分布集度函数为[2]

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i\langle x-b_i\rangle^{-1}+\sum_{i=1}^{l} q_i(\langle x-ci\rangle^{0}-\langle x-di\rangle^{0})+\sum_{i=1}^{m} M_i(x-a_i)^{-2} \tag{5}$$

式中括号〈〉为迈考利(W H Macauley)括号⒀为简洁,下面的讨论中求和不再写出项号⒀利用微分关系

$$q(x)=\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x};\ Q(x)=\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} \tag{6}$$

积分(5)式,即可得剪力方程和弯矩方程如下

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i\langle x-b_i\rangle^{0}+\sum_{i=1}^{n} q_i(\langle x-ci\rangle^{1}-\langle x-di\rangle^{1}) \tag{7}$$

$$M(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i\langle x-bi\rangle^{1}+\sum_{i=1}^{n} M_i(\langle x-q_i\rangle^{0}+$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i(\langle x-c_i\rangle^{2}-\langle x-d_i\rangle^{2}) \tag{8}$$

3 三铰拱内力的计算

把(7)(8)式代入拱内力表达式 1～3 式中,同时为了符号上的一致将(7)(8)式中 Q,M 用 Q^0,M^0 来表示⒀另外为将 M,Q 解析表示将 $\cos\Phi_k$,$\sin\Phi_k$ 用三角公式表示如下

$$\cos\Phi_k=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\Phi_k}}=\frac{1}{\sqrt{1+y_k'^2}} \tag{9}$$

$$\sin\Phi_k=\frac{\tan\Phi_k}{\sqrt{1+\tan^2\Phi_k}}=\frac{y_k'}{\sqrt{1+y_k'^2}} \tag{10}$$

当截面位置在 x 处时,只要去掉足标 K 即为该截面轴线与 x 方向的夹角的正弦和余弦⒀于是当拱的轴线方程以及外载为已知时,可得拱的内力表达式如下

$$Q=Q^0\cos\Phi-H\sin\Phi=Q^0\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{Hy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(Q^0-Hy')=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\sum p_i\langle x-b_i\rangle^{0}+\sum q_i\left(\langle x-c_i\rangle^{1}-\langle x-d_i\rangle^{1}\right)-Hy'\right] \tag{11}$$

$$M=M^0-Hy=\sum M_i\langle x-a_i\rangle^{0}+\sum p_i\langle x-b_i\rangle^{1}+$$

$$\frac{1}{2}\sum q_i(\langle x-c_i\rangle^2-\langle x-d_i\rangle^2)-Hy \tag{12}$$

$$N=\frac{Q^0y'}{1+y'^2}+\frac{H}{1+y'^2}=\frac{1}{1+y'^2}\Big[\sum p_i\langle x-b_i\rangle^0+\sum q_i(\langle x-c_i\rangle^1-\langle x-d_i\rangle^1+H\Big] \tag{13}$$

利用(12)式便于求出拱的弯矩的极值,在外载已知时,可由下式计算合理的拱轴

$$y=\frac{M^0}{H}=\frac{1}{H}\Big(\sum M_i\langle x-a_i\rangle^0+\sum p_i\langle x-b_i\rangle^1+\frac{1}{2}\sum q_i(\langle x-c_i\rangle^2-\langle x-d_i\rangle^2)\Big) \tag{14}$$

4 结束语

由于我们得到了拱在复杂载荷作用下的拱的内力的解析式,这为拱的设计提供了方便的算法,该算法的优点是表达式直观简洁,便于编程计算⒀另外,按照此思路与算法,亦可计算变截面拱的内力⒀

[参 考 文 献]

[1] 龙驭球,包世华.结构力学[M].北京:高等教育出版社,1979:P52～62.

[2] 王燮山.奇异函数及其在力学中的应用[M].北京:科学出版社,1993:68～77.

The Use of a Singular Function Method to Analyse the Internal Forces of a Solid Three Hinged Arch Subjected to Complex Loading

WANG Yong-xiang, TONG Gu-sheng, HUANG Xiao-sheng

(College of Civil Engineering, East China Jiaotong Univ, Nanchang 330013, China)

Abstract: This paper presents analytical solutions of internal forces of a solid three-hinged arch subjected to complex loadings by a singular function method. Compared with the traditional numerical method, the present solutions provide a convenience of programming and designing reasonable arch axes under known loading.

Key words: singular function method; three-hinged arch; internal forces