文章编号:1005-0523(1999)03-0034-05

一类线性控制系统的快速极点配置法

胡金莲，　熊金志

(华东交通大学 电气与信息工程学院，江西 南昌　330013)

摘要: 研究了一类具有对角线规范型的单输入线性定常系数的极点配置问题，得出一个新的计算状态反馈阵的公式19.该公式具有计算量小和不必进行任何矩阵运算的优点，可进行该类系统的快速极点配置19.

关　键　词: 线性系统；极点配置；状态反馈；控制

中图分类号: TP 202.1　　　　**文献标识码:** A

0　引　言

线性系统的极点配置是现代控制理论的重要问题19.一般地，只要系统完全能控，则可按有关方法进行极点配置[1]19.方法[1]计算量大，需2次矩阵求逆的运算，还需计算特征多项式的系数19.为了克服这些缺点，不断有学者在研究和探索更好的方法19.70年代的主要代表是Ackermann[2~3]，80年代的主要代表是Blanchini[4]和Nauyen[5]，90年代的主要代表是Valasek和Olgac[6]，他们的研究工作总的来说使极点配置变得较简捷，计算量较少19.特别是Valasek和Olgac，在他们的最新研究中[6]，声称其极点配置法比以往的方法的计算量都要小19.但从他们的有关的公式中明显可以看到仍需进行矩阵运算，包括 n 个矩阵相乘和矩阵求逆运算19.

笔者通过对对角线规范型的线性系统的研究，结果表明其极点配置不必进行矩阵运算，也不必计算特征多项式的系数，计算量比以往方法都小19.

1　极点配置

线性定常系统●= $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 只要完全能控，就可任意配置极点⒀一般的处理方法[1]是先作奇异变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PX}$，化系统为能控规范型●= $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，然后求出配置希望极点的状态反馈阵 $\boldsymbol{K}$，最后求出原系统的状态反馈阵 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{KP}^{-1}$⒀

对具有对角线规范型的系统，经笔者研究，不必按上述步骤去配置极点，有一个简便的方法直接算出状态反馈阵⒀

1.1　定理

设单输入线性定常系统完全能控，具有对角线规范型

收稿日期:1999-02-01；修订日期:1999-07-08

作者简介:胡金莲(1964-)，女，江西萍乡人，华东交通大学讲师，工学硕士.

$$\dot{X}=AX+BU \tag{1}$$

其中:　$A=\mathrm{diag}(\lambda_1\quad\lambda_2\quad\cdots\quad\lambda_n)$,　$B=[b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_3]^{\mathrm{T}}$⒀

λ_i两两相异,若将系统的极点配置在$t_j(j=1,2,\cdots,n)$上,则状态反馈阵

$$K=[K_1\ K_2\cdots K_n] \tag{2}$$

其中　$K_k=\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n}(\lambda_k-s_j)}{b_k\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)}$⒀　$(k=1,2,\cdots,n)$

1.2 证明

作非奇异变换$X=PX$,将系统化为能控标准型●$=(A,B)$,即

$$\overset{*}{X}=AX+Bu \tag{3}$$

其中:　$A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_{n-1}&-a_{n-2}&-a_{n-3}&\cdots&-a_0\end{bmatrix}$,　$B=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

$$A=P^{-1}AP,\qquad B=P^{-1}B \tag{4}$$

该非奇异变换矩阵[1]

$$P^{-1}=[C_0\quad C_0A\quad\cdots\quad C_0A^{n-1}] \tag{5}$$

其中:$C_0=e_n^{\mathrm{T}}Q^{-1}$,$e_n^{\mathrm{T}}=[0\quad 0\quad\cdots\quad 1]^{\mathrm{T}}$,$Q=[B\quad AB\quad\cdots\quad A^{n-1}B]$⒀

令$a=\{a_{n-1}\quad a_{n-2}\quad\cdots\quad a_0\}$,由方程(4)可得$AQ^{-1}=Q^{-1}A$,考虑矩阵$AQ^{-1}$和$Q^{-1}A$的最后一行,结合式(5)有$-aQ^{-1}=C_0A^n$,即

$$a=-C_0A^nQ \tag{6}$$

对于能控规范型(3),将极点配置在希望极点上,状态反馈阵[1]

$$K=d-a \tag{7}$$

d是希望极点对应的特征多项式

$$D(s)=s^n+d_0s^{n-1}+d_1s^{n-2}+\cdots+d_{n-1} \tag{8}$$

的系数向量　$d=[d_{n-1}\quad d_{n-2}\quad\cdots\quad d_0]$

则原系统的状态反馈阵[1] $K=KP^{-1}$结合(6),(7),可得

$$K=C_0(A^n+d_0A^{n-1}+d_1A^{n-2}+\cdots+d_{n-1})$$

或

$$K=e_n^{\mathrm{T}}Q^{-1}D(A) \tag{9}$$

其中:$D(A)$是希望极点对应特征多项式(8)的矩阵多项式,在对受控系统进行综合时,经常已给出或先得到希望极点⒀此时特征多项式可表示为

$$D(s)=(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)=\sum_{i=1}^{n}(s-s_i)$$

相应的矩阵多项式
$$D(A)=\prod_{i=1}^{n}(A-s_iI)$$
所以，式(9)又可写成
$$K=e_n^{T}Q^{-1}\prod_{i=1}^{n}(A-s_iI) \tag{10}$$
此结果与 Valasek-Olgac 相同[6](13)显然与方程(1)相比有明显优点：一是不必求系统的能控规范型，即不必算变换阵 P 及其逆，二是不必计算希望极点对应的特征多项式的系数(13)

对于本文研究的系统[1]，能控性矩阵
$$Q=\begin{bmatrix} b_1 & b_1\lambda_1 & \cdots & b_1\lambda_1^{n-1} \\ b_2 & b_2\lambda_2 & \cdots & b_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & b_n\lambda_n & \cdots & b_n\lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$
其行列式是范德蒙行列式
$$Q=\prod_{k=1}^{n}b_k\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j) \tag{11}$$
Q 的代数余子式 Q^{*} 一般不好求，考虑到 $e_n^{T}Q^{-1}$，故只需求 Q^{*} 的最后一行，即原能控矩阵 Q 的最后一列每一个元素的代数余子式
$$Q^{*}=\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{1n}^{*} & Q_{2n}^{*} & \cdots & Q_{nn}^{*} \end{bmatrix} \tag{12}$$
易知，每个代数余子式都是$(n-1)$阶的范德蒙行列式，其值(推导略)
$$Q_{kn}^{*}=\prod_{i=1,i\neq k}^{n}b_i\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n,j\neq k}^{n}(\lambda_i-\lambda_j),k=1,2,\cdots,n \tag{13}$$
所以
$$Q^{-1}=\frac{Q^{*}}{\det(Q)} \tag{14}$$
将(11)～(13)代入(14)可得
$$Q^{-1}=\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q'_{1n} & Q'_{2n} & \cdots & Q'_{nn} \end{bmatrix}$$
其中：Q^{-1}最后一行的元素
$$Q'_{nk}=\frac{1}{b_k\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(\lambda_i-\lambda_k)} \tag{15}$$
将此式代入到(10)中的 $e_n^{T}Q^{-1}$，可得
$$e_n^{T}Q^{-1}=[\,Q'_{n1}\quad Q'_{n2}\quad\cdots\quad Q'_{nn}\,] \tag{16}$$

考虑到 A 是对角矩阵，所以式(10)可表示为

$$K = e_n^{\mathrm{T}} Q^{-1} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{diag}(\lambda_1 - s_j, \lambda_2 - s_j, \cdots, \lambda_n - s_j) =$$
$$e_n^{\mathrm{T}} Q^{-1} \mathrm{diag}\left[\prod_{j=1}^{n}(\lambda_1 - s_j), \prod_{j=1}^{n}(\lambda_2 - s_j), \cdots, \prod_{j=1}^{n}(\lambda_n - s_j)\right]$$

将(15)和(16)代入,可得

$$K = \left[\frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_1 - s_j)}{b_1 \prod_{i=2}^{n}(\lambda_i - \lambda_1)}, \frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_2 - s_j)}{b_2 \prod_{i=1, i\neq 2}^{n}(\lambda_i - \lambda_2)}, \cdots, \frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda_n - s_j)}{b_n \prod_{i=1, i\neq n}^{n}(\lambda_i - \lambda_n)}\right] \tag{17}$$

或写成

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_n]$$

其中 K_k 同式(2)⒀证毕⒀

2　计算量的比较

用式(17)或式(2)可方便地确定系统的状态反馈阵,使极点配置在希望的极点上,不必求由原系统化为能控标准型的变换矩阵 P 及其逆,不必求能控性矩阵 Q 及其逆,也不必求特征多项式的系数⒀

下面把有关学者的研究结果相比较,将他们的计算量列出来[6]:

Ackermann:$(n^4 + \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n)$;　　Blanchini:$(\frac{8}{3}n^3 + n^2 - \frac{2}{3}n)$;

Nguyen:$(\frac{8}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{2}{3}n)$;　　Valasek-Olgac:$(\frac{7}{3}n^3 - \frac{1}{3}n)$

本文:$(2n^2 - n)$

其中:n 表示系统的阶次⒀

3　算　例

考虑系统

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}, \quad B = [3 \quad 2 \quad 1]$$ ⒀

要求将极点配置在 $-1, -2, -3$ 上,确定状态反馈阵 K⒀显然,系统完全能控⒀由题意知 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$; $s_2 = -2$, $s_3 = -3$, $b_1 = 3$; $b_2 = 2$, $b_3 = 1$,根据式(17)或式(2),状态反馈阵可直接计算

$$K_1 = \frac{\sum_{j=1}^{3}(\lambda_1 - s_j)}{b_1 \sum_{i=2}^{3}(\lambda_i - \lambda_1)} = 4, \quad K_2 = \frac{\sum_{j=1}^{3}(\lambda_2 - s_j)}{b_2 \sum_{i=1, i\neq 2}^{3}(\lambda_i - \lambda_2)} = -30, \quad K_3 = \frac{\sum_{j=1}^{3}(\lambda_3 - s_j)}{b_3 \sum_{i=1}^{3}(\lambda_i - \lambda_3)} = 60$$ ⒀

所以 $K = [4 \quad -30 \quad 60]$,此结果与其他学者得出的结果一致⒀

4 结 论

本文的方法是针对具有对角线规范型的单输入线性定常系统提出来的，是 Ackermann 方法的继续和发展，是在 Valasek 等人的基础上进一步研究的结果19.前面提到 Ackermann 和 Valasek 等人的方法其优点是减少了极点配置的计算量，本文的方法则可以进一步减少计算量，不必计算特征多项式的系数，也不必计算能控性矩阵及其逆，连矩阵运算都不必要，只要进行简单的加减乘除运算就可算出极点配置的状态反馈阵，实在是很方便19从文中的例子和计算量的比较中可以明显看出这些优点19.

[参 考 文 献]

[1] 于长官19.现代控制理论[M]19.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，1988. 162～16419.

[2] ACKERMANN J·Der Entwurf Linearer Regelungssysteme im Zustandraum[J]· **Rejel· Tech· Proz· ¬ Datenverarb·**，1972，7:297～30019.

[3] ACKERMANN J·Entwurf durch polvorgabe[J]· **Regel· Tech· Proz· ¬Datenverarb·** 1977，(6～7):173～179，209～21519.

[4] BLANCHINI，F·New canonical form for pole placement[J]· **IEEE Proc·D**，1989，136(6):314～31619.

[5] NGUREN Ch·· Rbitrary eigervalue assignments for linear time¬varying multivariable control systems [J]· **Int· J·Control**，1987，45:1 051～1 05719.

[6] VALASEK M·，OLGAC N·Efficient pole placement technique for Linear time¬variant SISO systems [J]· **IEE Proc·¬Control Theory Appl·** 1995，142(5):451～45819.

Fast Pole Placement Technique for a Kind of Iinear Time¬invariant Systems

HU Jin¬lian， XIONG Jin¬zhi

(College of Electrical and Electronic Information Engineering，East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract: A pole placement problem for single input linear time¬invariant systems with diagonal is studied·A new formula used to compute state feedback matrixes is obtained· As far as the advantage of this formula is concerned，it requires no computation of characteristic polynomial coefficients of eigenvature and its computational efficiency is much superior to some other techniques·

Key words: linear systems；pole placement；state feedback；control