文章编号:1005-0523(1999)03-0068-06

不分明化近性空间(聊

蒋志勇[1],赖国治[2]

(1.华东交通大学 基础课部,江西 南昌　330013;2.南方冶金学院 成人教育部　江西 赣州　341000)

摘要:在不分明化拓扑的框架下,给出了不分明化近性空间的定义⒀在此基础上给出了一个不分明化近性空间的等价性刻划(用映射族);然后又定义了不分明化近性滤子与不分明化近性邻域系,并讨论了它们的若干性质,证明了不分明化近性邻域系是不分明化近性滤子,同时,还证明了满足一定条件的不分明化邻域系可以诱导一个不分明化近性空间⒀作为不分明化近性空间理论的核心——*Weil* 定理将在后续文章中讨论⒀

关　键　词:不分明化近性空间;不分明化近性邻域系;不分明化近性滤子

中图分类号:O 159　　　**文献标识码**:A

1　预备知识

为了能够较好应用证明生先生建立的不分明化拓扑这一工具讨论近性空间的理论,我们需要下面的模糊逻辑与有关公理集合论的概念及公式⒀

1) $[\neg\alpha]:=1-[\alpha]$(其中$[\alpha]$ 表示逻辑公式 α的真值);

2) $[\alpha\wedge\beta]:=\min([\alpha],[\beta])$;

3) $[\alpha\to\beta]:=\min(1,1-[\alpha]+[\beta])$;

4) $[(\forall x)\ \alpha(x)]:=\inf[\alpha(X)]$($X$ 为论域);

5) $[x\in A]:=A(x)$;

6) 导出公式:下面设 A、$B\in\mathcal{F}(X)$　(X 为论域)

$A\subseteq B:=(\forall x)(x\in A\to x\in B)$;

$\alpha\leftrightarrow\beta:=(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$;

$(\exists x)\ \alpha(x):=\neg(\forall x)\neg\alpha(x)$;

$A\equiv B:=(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$;

$\alpha\vee\beta:=\neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$;

定义 1.1　设 X 是论域,$\mathcal{T}\in\mathcal{F}(P(X))$ 满足下面的

$(T1)$　$\vDash X\in\mathcal{T}$

$(T2)$　$\vDash(A\in\mathcal{T})\wedge(B\in\mathcal{T})\to A\cap B\in\mathcal{T}$　A、$B\subseteq X$

$(T3)$　$\vDash(\forall\lambda)(\lambda\in\Lambda\to A_\lambda\in\mathcal{T})\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\mathcal{T}$　$\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\subseteq P(X)$

则称 $\mathcal{T}$ 为 X 上的一个不分明化拓扑,$(X,\mathcal{T})$ 称为不分明化拓扑空间⒀

收稿日期:1999-03-09;　**修订日期**:1999-03-22

作者简介:蒋志勇(1966-),男,江西南昌人,华东交通大学讲师,硕士.

定义 1.2　集合 X 上的不分明化闭集族(以 $\mathscr{F} \in \mathscr{F}(P(X))$ 表示)定义如下

$$A \in \mathscr{F} := X - A \in \mathscr{T}$$

引理 1.1　若 $\mathscr{T} \in \mathscr{F}(P(X))$ 满足定义 1.1 中的 $(T1)-(T3)$,则有

$(F1)$　$\models \varnothing \in \mathscr{F}$

$(F2)$　$\models (A \in \mathscr{F}) < (B \in \mathscr{F}) \to A \cup B \in \mathscr{F}$　A、$B \subseteq X$

$(F3)$　$\models (\forall \lambda)(\lambda \in \Lambda \to A_\lambda \in \mathscr{F}) \to \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathscr{F}$　$\{A_\lambda | \lambda \in$ 牼$\} \subseteq P(X)$

反之,若 $\mathscr{F} \in \mathscr{F}(P(X))$ 满足 $(F1)-(F3)$,则 $\mathscr{T} \in \mathscr{F}(P(X))$ 是 X 上的一个不分明化拓扑[13]
其中

$$A \in \mathscr{T} := X - A \in \mathscr{F}$$

2　不分明化近性空间的定义

定义 2.1　设 X 是论域,若二元 F-谓词 $\mathscr{P} \in \mathscr{F}(P(X) \times P(X))$ 满足下列条件:

$(P1)$　$\models (A, B) \in \mathscr{P} \to (B, A) \in \mathscr{P}$　　$A, B \subseteq X$

$(P2)$　$\models A \cap B \neq \varnothing \to (A, B) \in \mathscr{P}$　　$A, B \subseteq X$

$(P3)$　$\models (A \subseteq C) < (B \subseteq D) \to ((A, B) \in \mathscr{P} \to (C, D) \in \mathscr{P})$　　$A, B, C, D \subseteq X$

$(P4)$　$\models \neg((\varnothing, X) \in \mathscr{P})$

$(P5)$　$\models \neg((A, C) \in \mathscr{P}) < \neg((B, C) \in \mathscr{P}) \to \neg((A \cup B, C) \in \mathscr{P})$　　$A, B, C \subseteq X$

$(P6)$　$\models \neg((A, B) \in \mathscr{P}) \to (\exists C)((C \subseteq x) < \neg((A, C) \in \mathscr{P}) < \neg((B, X - C) \in \mathscr{P}))$　　$A, B \subseteq X$[13]

则称 $\mathscr{P}$ 是 X 上的一个不分明化近性关系(或结构),$(X, \mathscr{P})$ 上称为不分明化近性空间[13]

为给出近性空间与映射族的等价性刻划,先给出下面的:

定义 2.2　一元 F-谓词 $G \in \mathscr{F}(P(X)^{P(X)})$ 定义如下:$\varphi \in G := (\forall A)(A \subseteq X) \to \neg((A, \varphi A^C) \in \mathscr{P})$ 其中 $\mathscr{P}$ 是 X 上的不分明化近性关系[13]

定理 2.1　设 $(X, \mathscr{P})$ 是不分明化近性空间,则对 def2.2 中的 $G \in \mathscr{F}(P(X)^{P(X)})$ 有:

1)　$\models (\forall A)(\forall \varphi)((A \subseteq X) < (\varphi \in G) \to (\varphi A) \subseteq A))$

2)　对任何的 $A \subseteq X$,

$\models (\forall \varphi)(\forall \psi)((\psi \in G) < (\varphi \in G) \to (\varphi \cup \psi \in G))$

其中,$(\varphi \cup \psi)(A) := \varphi A) \cup \psi A)$

3)　$\models (\forall \varphi)(\forall \psi)((A \subseteq X < (\varphi \in P(X)^{P(X)}) \to ((\exists \psi)((\psi \in G) < (\varphi A)^C \subseteq \psi A^C)))$
$\to \neg((A, \varphi A^C)) \in \mathscr{P})))$

4)　$\models (\forall \varphi)(\forall A)(\forall B)((\varphi \in G) < (B \subseteq \varphi A^C)) \to (\exists \psi)((\psi \in G) < ((\psi A^C))^C \subseteq \psi B^C))))$

5)　$\models (\forall \varphi)(\forall A)(\forall B)((\varphi \in G) < (B \subseteq \varphi A^C)) \to (\exists \psi)((\psi \in G) < (A \subseteq \psi B^C))))$

反之,若 $G \in \mathscr{F}(P(X)^{P(X)})$ 满足 $(1) \sim (5)$,则 $\mathscr{P}$ 是 X 上的一个不分明化近性结构[13]其中 $\mathscr{P} \in \mathscr{F}(P(X) \times P(X))$ 定义如下:

$$(A, B) \in \mathscr{P} := (\forall \varphi)(\varphi \in G \to 7(B \subseteq \varphi A^C)))\quad A, B \subseteq X$$

证明

(1),(2),(3) 显然,

4) 对任意 A、$B\subseteq X$,$\varphi\in P(X)^{P(X)}$,

$$[(\varphi\in G)\wedge(B\subseteq\varphi A^C)]=\min(\inf_{C\subseteq X}(1-\boldsymbol{P}(C,\varphi C^C)),[B\subseteq\varphi A^C])$$
$$\leqslant\min(1-\boldsymbol{P}(A,\varphi A^C),[B\subseteq\varphi A^C])$$
$$\leqslant 1-\boldsymbol{P}(A,B)\leqslant\sup_{C\subseteq X}\min(1-\boldsymbol{P}(A,C),1-\boldsymbol{P}(B,C^C))$$

对任给的自然数 n,存在 $C_n\subseteq X$,使得

$$1-\boldsymbol{P}(A,B)-\frac{1}{n}<\min(1-\boldsymbol{P}(A,C_n),1-\boldsymbol{P}(B,C_n^C))\leqslant$$
$$1-\boldsymbol{P}(A,C_n)\leqslant\sup_{D\subseteq X}\min(1-p(A,D^C),1-\rho(C_n,D))$$

存在 $D_n\subseteq X$,使得

$$1-\boldsymbol{P}(A,B)-\frac{1}{n}<\min(1-\boldsymbol{P}(A,D_n^C),1-\boldsymbol{P}(C_n,D_n))$$

今令 $\psi:\quad P(X)\to P(X)$

$$E^c\to\psi(E^C)=\begin{cases}D_n^c, & \text{当 } E=A\\ C_n^c, & \text{当 } E=B\\ \varnothing, & \text{其它}\end{cases}$$

则 $G(\psi)=\inf_{E\subseteq X}(1-\boldsymbol{P}(E,\psi(E^C)))=\min(1-\boldsymbol{P}(A,D_n^C),1-\boldsymbol{P}(B,C_n^c))$

$$>1-\boldsymbol{P}(A,B)-\frac{1}{n}$$

且 $[(\psi(A^c))^c\subseteq\psi(B^c)]=[(\psi(B^c))^c\subseteq\psi(A^c)]=[C_n\subseteq D_n^c]\geqslant 1-\boldsymbol{P}(C_n,D_n)$

$$>1-\boldsymbol{P}(A,B)-\frac{1}{n}$$

由 n 的任意性,可以得到

$$[(\exists\psi)((\psi\in G)\wedge((\psi(A^c))^c\subseteq\psi(B^c)))]=\sup_{\psi}\min(G(\psi),[(\psi(A^c))^c\subseteq\psi(B^c)])$$
$$\geqslant 1-\boldsymbol{P}(A,B)\geqslant[(\varphi\in G)\wedge(B\subseteq\varphi(A^c))]$$

由 A、$B\subseteq X$ 及 $\varphi\in P(X)^{P(X)}$ 的任意性,知结论成立[13]

5) 由于

$$G(\psi)=\inf_{C\subseteq X}(1-\boldsymbol{P}(C,\psi(C^c)))\leqslant 1-\boldsymbol{P}(A,\psi(A^c))\leqslant$$
$$[A\cap\psi(A^c)=\varnothing]=[A\subseteq(\psi(A^c))^c]\qquad\text{对任何 } A\subseteq X$$

所以 $\min(G(\psi),[(\psi(A^c))^c\subseteq\psi(B^c)])\leqslant[A\subseteq\psi(B^c)]$

注意到(4)的正确性就知结论成立[13]

反之,要证明 $\boldsymbol{P}$ 是 X 上的一个不分明化近性结构,只需验证 $\boldsymbol{P}$ 满足 def 2.1 中的($P1$)—($P6$)即可[13]

3 不分明化近性滤子和近性邻域

定义 3.1 设 X 是论域,若一元 F-谓词 $\sigma\in\boldsymbol{F}(P(X))$ 满足下列条件

1) $\models\neg(\varphi\in\sigma)$

2) $\models (A \in \sigma < (B \in \sigma \rightarrow A \cap B \in \sigma$　　　$A, B \subseteq X$

3) $\models A \subseteq B \rightarrow (A \in \sigma \rightarrow B \in \sigma$　　　$A, B \subseteq X$

则称 σ是 X 上的不分明化滤子[13]

定义 3.2　设$(X, \mathcal{P})$ 是不分明化近性空间[13]称一元 F-谓词 $N_A \in \mathcal{F}(P(X))$ 为 $A(\subseteq X)$ 的 $\mathcal{P}$-- 不分明化近性邻域系，其定义如下

$$B \in N_A := \neg((A, B^c) \in \mathcal{P}),$$

也称 N_A 为由不分明化近性关系 $\mathcal{P}$ 所诱导的 A 的不分明化近性邻域系[13]

定理 3.1　设$(X, \mathcal{P})$ 是不分明化近性空间，则对任意的 A、$B \in P(X)$，有

$\models \neg((A, B) \in \mathcal{P}) \rightarrow (\exists C)(\exists D)((C \subseteq X) < (D \subseteq X) \rightarrow (C \in N_A) < (D \in N_B) < (C \cap D = \varnothing))$

证明　$\because [\neg((A, B) \in \mathcal{P})] \leqslant \mathop{\mathrm{Sup}}_{E \subseteq X} \min([\neg((A, E) \in \mathcal{P})], [\neg((B, E^c) \in \mathcal{P})])$

若　$[\neg((A, B) \in \mathcal{P})] > t$，　$t \in [0, 1]$[13]则存在 $E \subseteq X$，使得：

$\min([\neg((A, E) \in \mathcal{P})], [\neg((B, E^c) \in \mathcal{P})]) > t$

即　$\min(N_A(E^c), N_B(E)) > t$

所以　$\mathop{\mathrm{Sup}}_{\substack{C, D \subseteq X \\ C \cap D = \varnothing}} (N_A(C), N_B(D)) \geqslant \min(N_A(E^c), N_B(E))$

定理 3.2　设$(X, \mathcal{P})$ 是不分明化近性空间，$\varnothing \neq A \subseteq X$，$N_A$ 为 A 的 $\mathcal{P}$-- 不分明化近性邻域系[13]则有

1) $\models \neg(\varphi \in N_A)$

2) $\models (B \in N_A) < (C \in N_A) \rightarrow B \cap C \in N_A$　　　$B, C \subseteq X$

3) $\models B \subseteq C \rightarrow (B \in N_A \rightarrow C \in N_A)$　　　$B, C \subseteq X$

证明　1) $1 \geqslant [\neg(\bullet \in N_A)] = 1 - [\bullet \in N_A] = \mathcal{P}((A, X)) \geqslant [\neg(A \cap X = \varnothing)] = 1$

2) $[(B \in N_A) < (C \in N_A)] = \min(N_A(B), N_A(C)) = \min([\neg((A, B^c) \in \mathcal{P})],$
$[\neg((A, C^c) \in \mathcal{P})] \leqslant \min([\neg((B^c, A) \in \mathcal{P})], [\neg((C^c, A) \in \mathcal{P})]) \leqslant [\neg((B^c \cup C^c, A)$
$\in \mathcal{P})]$
$= [\neg(((B \cap C)^c, A) \in \mathcal{P})] \leqslant [\neg((A, (B \cap C)^c) \in \mathcal{P})] = [((B \cap C) \in N_A)]$

3) 若 $B \subseteq C$，则 $C^c \subseteq B^c$

$$[B \in N_A] = [\neg((A, B^c) \in \mathcal{P})] \leqslant [\neg((A, C^c) \in \mathcal{P})] = [C \in N_A]$$

若 $B \nsubseteq C$，则显然[13]

由定理 3.2 知，不分明化近性空间中的不分明化近性邻域系实际上是不分明化滤子[13]

定理 3.3　设$(X, \mathcal{P})$ 是不分明化近性空间，对任何 A、$B \subseteq X$，则

1) $\models B \in N_A \rightarrow A \subseteq B$

2) $\models B \in N_A \leftrightarrow A^c \in N_{B^c}$

3) $\models A \subseteq B \rightarrow N_B \subseteq N_A$

4) $\models N_{A \cup B} = N_A \cap N_B$

5) $\models B \in N_A \rightarrow (\exists C)((C \subseteq X) < (C \in N_A) < (B \in N_C))$

6) $\models (\forall C)(\forall D)((C \subseteq X) < (D \subseteq X) \rightarrow ((C \in N_A) < (D \in N_B) \rightarrow (C \cap D$
$\in N_{A \cap B})))$

证明 1) $[B \in N_A] = [\neg((A, B^c) \in \mathbf{P})] \leqslant [A \cap B^c = \varnothing] = [A \subseteq B]$

2) $[A^c \in N_{B^c}] = [\neg((B^c, A) \in \mathbf{P})] = [\neg((A, B^c) \in \mathbf{P})] = [B \in N_A]$

3) $[N_B \subseteq N_A] = \inf\limits_{C \subseteq X} \min(1, 1 - N_B(C) + N_A(C)) = \inf\limits_{C \subseteq X} \min(1, 1 - [\neg((B, C^c) \in \mathbf{P})] + [\neg((A, C^C) \in \mathbf{P})])$ ⒀

若 $A \subseteq B$，则 $[\neg((B, C^C) \in \mathbf{P})] \leqslant [\neg((A, C^C) \in \mathbf{P})]$，于是 $[N_B \subseteq N_A] = 1$；若 $A \nsubseteq B$，则显然⒀

4) 对任意 $C \subseteq X$，$N_{A \cup B}(C) = [\neg((A \cup B, A^C) \in \mathbf{P})] = \min([\neg((A, C^C) \in \mathbf{P})], [\neg((B, C^C) \in \mathbf{P})]) = \min(N_A(C), N_B(C))$

5) $N_A(B) = [\neg((A, B^c) \in \mathbf{P})] \leqslant \operatorname*{Sup}\limits_{C \subseteq X} \min([\neg((A, C^c) \in \mathbf{P})], [\neg((B^c, C) \in \mathbf{P})]) = \operatorname*{Sup}\limits_{C \subseteq X} \min(N_A(C), N_C(B))$

6) 对任意 C、$D \subseteq X$，

$\min(N_A(C), N_B(D)) = \min([\neg((A, C^c) \in \mathbf{P})], [\neg((B, D^c) \in \mathbf{P})]) \leqslant \min([\neg((A \cap B, C^c) \in \mathbf{P})], [\neg((A \cap B, D^c) \in \mathbf{P})]) = \min[\neg((C^c, A \cap B) \in \mathbf{P})], [\neg((D^c, A \cap B) \in \mathbf{P})] = [\neg(((C \cap D)^c, (A \cap B)) \in \mathbf{P})] = [\neg((A \cap B, (C \cap D)^c) \in \mathbf{P})] = N_{A \cap B}(C \cap D)$

下面是定理 3.3 的逆定理

定理 3.4 设 X 是非空集合，$A \subseteq X$，若 A 的不分明化邻域系满足定理 3.3 中的 (1) − (5)，且 $\models \varnothing \in N_\varnothing$⒀定义 X 上的一个二元 F- 谓词 $\mathbf{P} \in \mathbf{F}(P(X) \times P(X))$ 如下：

$$(A, B) \in \mathbf{P} := \neg(B^c \in N_A)$$

则 $\mathbf{P}$ 是 X 上的不分明化近性关系⒀

证明 直接验证 $\mathbf{P}$ 满足定义 2.1 中的 $(P1) - (P6)$⒀

定义 3.3 1) 设 $(X, \mathbf{P})$ 是不分明化近性空间，$x \in X$，x 的 $\mathbf{P}$- 不分明化近性邻域系 $N_x \in \mathbf{F}(P(X))$ 定义为

$$A \in N_x = A \in N_{\{x\}}$$

2) 设 Ω 为不分明化近性空间的类，一元 F- 谓词 S、$T_0 \leqslant \mathbf{F}(\Omega)$ 定义如下：

$(X, \mathbf{P}) \in S := (\forall x)(\forall y)((x \in X) < (y \in X) < (x \neq y) \to \neg((\{x\}, \{y\}) \in \mathbf{P}))$

称 S 为不分明化可分离的；

$(X, \mathbf{P}) \in T_0 := (\forall x)(\forall y)((x \in X) < (y \in X) < (x \neq y) \to (\exists A)(((A \in N_x) < (y \in A^c)) > ((A \in N_y) < (x \in A^c))))$

定理 3.5 设 $(X, \mathbf{P}) \in \Omega$，则有

1) (a) 对任何 x、A，$\models A \in N_x \to x \in A$

(b) 对任何 x、A、B，$\models (A \in N_x) < (B \in N_x) \to A \cap B \in N_x$

(c) 对任何 x、A、B，$\models A \subseteq B \to (A \in N_x \to B \in N_x)$

2) $\models (X, \mathbf{P}) \in S \leftrightarrow (X, \mathbf{P}) \in T_0$

证明 1) 显然⒀

2) 设 $[(X, \mathbf{P}) \in S] = \inf\limits_{x \neq y} [\neg((\{x\}, \{y\}) \in \mathbf{P})] > \alpha \quad \alpha \in [0, 1)$⒀

$\because \quad [\neg((\{x\}, \{y\}) \in \mathbf{P})] = N_x(\{y\}^c) > \alpha, \forall x, y \in X, x \neq y,$

∴ $\sup\limits_{\substack{A\subseteq X\\ y\in A^c}} N_x(A) \geqslant N_x(\{y\}^c) > \alpha$

则 $[(X,P)\in T_0] = \inf\limits_{x\neq y}\max\left(\sup\limits_{\substack{A\subseteq X\\ y\in A^c}} N_x(A), \sup\limits_{\substack{A\subseteq X\\ x\in A^c}} N_y(A)\right) \geqslant \alpha$

反过来,设$[(X,P)\in T_0] > \alpha$ $\alpha\in[0,1)$ 则对任意的 $x\neq y$, $\sup\limits_{x\in A^C} N_x(A) > \alpha$或

$\sup N_y(A) < \alpha$ 不妨设 $\sup\limits_{y\in A^C} N_x(A) > \alpha$

则存在 $A\subseteq X$, $y\in A^c$,且 $N_x(A) > \alpha$

有 $[\neg((\{x\},\{y\})\in P)] = N_x(\{y\}^c) \geqslant N_x(A) > \alpha$

从而 $\inf\limits_{x\neq y}[\neg((\{x\},\{y\})\in P)] = [(X,P)\in S] \geqslant \alpha$

根据α的任意性,我们即得 $[(X,P)\in T_c] = [(X,P)\in S]$

[参 考 文 献]

[1] MingSheng, Ying. A new approach for fuzzy topology(聊[J], **F.S.S**, 1991, 39: 303～321.

[2] Katsaras.A.K. Fuzzy Proximity Spaces[J]. **J.Math Anal Appl**, 1979, 68: 100～110.

[3] WangJing, Liu. Fuzzy proximity Spaces Redefined[J], **F.S.S**, 1985, 15: 241～248.

[4] 蒋志勇.不分明化拓扑中F-滤子网的若干性质[J].模糊系统与数学, 1992, 6: 269～270.

[5] JiZhong, Sheng. Separation Axiom in fuzzifying topolopy[J]. **F.S.S**, 1993, 57: 111～123.

Fuzzifying Proximity Spaces(聊

JIANG Zhi-yong, LAI Guo-zhi[2]

(Basic Courses Department, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Southern Institute of Metallurgy, Ganzhou 341000, China)

Abstract: Proximity is an important concept close to toplogy and a convenient tool for an inestigation of topology. In this paper, We introduce the concepts of fuzzifying proximity spaces and neighorhood Proximity, discuss some of their properties and draw a conclusion that fuzzifying proximity neighborhood satisfying the conditions may induce a fuzzifying proximity spaces. The most important (weil) theorem will be discussed in the Fuzzifying proximity Spaces(聊

Key words: fuzzifying proximity spaces; fuzzifying proximity neighborhood system; fuzzifying proximity filter