文章编号:1005-0523(1999)03-0074-04

毛虫树的$\int\sum$-数*

邓毅雄[1],周尚超[1],徐保根[1],聂 瑛[2]
(华东交通大学 1.基础课部 2.教务处,江西 南昌 330013)

摘要: 对图 $G=(V,E)$,$S\subset Z$,如果 $V=S$,且 $uv\in E(u,v\in V)$ 当且仅当 $u+v\in S$,那么称 G 为关于 S 的 $\int\sum$-图。而 $\int\sum$-数 $\zeta(G)=\min\{t\,|\,G\cup tK_1$ 是 $\int\sum$-图$\}$。这是文献[1]所引入的概念。本文解决了文献[1]中的一个问题,证明了:所有毛虫树 T 均为 $\int\sum$-图,即 $\zeta(T)=0$,同时否定了该文中的猜想:所有满足 $\zeta(T)=0$ 的树 T 都是毛虫树。

关 键 词: 树;毛虫树;$\int\sum$-图;$\int\sum$-数
中图分类号: O 157.5 **文献标识码:** A

0 引 言

本文仅讨论简单图。树是无向连通图,P_n 表示 n 阶路,毛虫树是删掉所有悬挂点恰得到一条路的树,记为 $S(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,其 d_i 为这条路上的第 i 个点所邻接的悬挂点数,且 d_1、$d_n\geqslant 1$。$S(m,n)$ 称为双星图。

文献[2]引入了$\sum$-图(Sum graph)的概念,文献[1]进入进一步引入了$\int\sum$-图(Integral Sum graph)的概念。

定义1 设图 $G=(V,E)$,Z 是整数集。若存在 $S\subset Z$,使得

1) $V=S$;

2) $u,v\in V$,$uv\in E$ 当且仅当 $u+v\in S$,

则称 G 为关于 S 的$\int\sum$-图,记 $G=G^+(S)$。

图 G 的$\int\sum$-数(Integral sum number) $\zeta(G)$ 定义为:

$$\zeta(G)=\min\{t\,|\,G\cup tK_1 \text{ 是 } \textstyle\int\sum\text{-图}\}$$

文献[1]提出刻划满足 $\zeta(T)=0$ 的树 T 的问题,尤其当 T 是毛虫树的情形。该文也猜想:所有满足 $\zeta(T)=0$ 的树 T 都是毛虫树。首先我们指出,此猜想是不成立的,本文作者之一在文献[4]中证明了:所有三路树都是$\int\sum$-图(三路树是具有一个公共端点的三条路所构成的图)

收稿日期:1998-12-07;修订日期:1999-01-04
基金项目:江西省自然科学基金资助(3000009702)
作者简介:邓毅雄(1963-),男,江西新干人,华东交通大学副教授

本文将证明:所有毛虫树 T 均满足 $\zeta(T)=0$⒀　**定义 2**　已知图 G,$u\in V(G)$,若在 u 上邻接若干条悬挂边,再在某新增的悬挂点上邻接若干条悬挂边,如此继续下去,所得到的图称为图 G 关于点 u 的毛虫扩充图⒀

特别当 G 是毛虫树,u 是悬挂点时,所得之图称为 G 的毛虫扩充树⒀注意到,所有毛虫树都可以由双星图 $S(m,n)$ 进行如上扩充而得到⒀

1　主要结果

下面**引理 1** 是显然的⒀

引理 1　若 G 是关于 S 的 $\int\sum$ - 图,$S^-=\{-u\mid u\in S\}$,则 G 也是关于 S^- 的 $\int\sum$ - 图⒀

由定义 1 知,如果 S 仅包含正整数,G 是关于 S 的 $\int\sum$ - 图,则 $\max S$ 对应的点为孤立点,从而任一连通的 $\int\sum$ - 图对应的整数集 S 一定含有 0 或负整数⒀

定理 2　设 $0\notin S$,$|w|=\max\{|u|\mid u\in S\}$,且不存在 $v\in S$,使 $w=-v$⒀如果 G 是关于 S 的连通 $\int\sum$ - 图,则 G 关于 w 的毛虫扩充图也是 $\int\sum$ - 图⒀

证明　由引理 1,不妨设 $w>0$,且 $w_0=\min S$,显然 $-w<w_o<0$⒀

设在 G 的点 w 上邻接 k 条悬挂边所得之图为 G_1,对应悬挂点记为 $w_1,w_2,\cdots,w_k$⒀下面证明 G_1 也是 $\int\sum$ - 图⒀

设 $S_1=S\cup\{w_1,w_2,\cdots,w_k\}$,其中 $w_i=-iw+w_o(i=1,2,\cdots,k)$,那么 G_1 是关于 S_1 的 $\int\sum$ - 图⒀事实,$\forall u$、$v\in V(G_1)=S_1$,有

1) 当 u、$v\in V(G)$ 时,显然若 $uv\in E(G)$,从而 $uv\in E(G_1)$;若 $uv\notin E(G)$,则 $u+v\notin S$,又由于 $u\geqslant w_o$,$v\geqslant w_o$,且至多一个等式成立,从而 $u+v>2w_o>-w+w_o\geqslant w_i(i=1,2,\cdots,k)$,则 $u+v\notin S_1\setminus S$,故 $u+v\notin S_1$,$uv\notin E(G_1)$;

2) 当 u、$v\notin V(G)$ 时,设 $u=-sw+w_o$,$v=-tw+w\cdot(s\neq t)$,则 $u+v=-(s+r)w+2w_o\notin S$⒀若 $u+v\in S_1\setminus S$,设 $u+v=-mw+w_o$,则 $w_o=(s+t-m)w$,这与 w、w_o 的假设矛盾,从而 $u+v\notin S_1\setminus S$,故 $uv\notin E(G_1)$;

3) 当 $u\in V(G)$,$v\in V(G_1)\setminus V(G)$ 时,设 $v=-tw+w_o$,那么

$$u+v=u-tw+w_o\leqslant w-tw+w_o=-(t-1)w+w_o\leqslant w_o,$$

其中第一个不等式取等号当且仅当 $u=w$ 时,也即当 $u=w$ 时,有 $u+v\in S_1\setminus S$,即 $uv\in E(G_1)$⒀当 $u\neq w$ 时,$u+v\notin S_1$,即 $uv\notin E(G_1)$⒀

综上所述,G_1 是关于 S_1 的 $\int\sum$ - 图⒀

由于 $\int\sum$ - 图 G_1 仍满足定理条件,如此继续关于 w_k 扩充下去,所得毛虫扩充图仍是 $\int\sum$ - 图,故定理获证⒀

定理 2 为我们讨论树为 $\int\sum$ - 图提供了一种方法,下面仅就毛虫树进行讨论⒀

引理 2 任意双星图 $S(m,n)$ 是 $\int\sum-$ 图(13)

证明 设 $S(m,n)$ 的两个非悬挂点为 u、v，与 u 邻接的 m 个悬挂点为 $u_i(i=1,2,\cdots,m)$，与 v 邻接的 n 个悬挂点为 $v_j(j=1,2,\cdots,n)$(13)

记 $S=\{u,u_i(i=1,2,\cdots,m),v,v_j(j=1,2,\cdots,n\}$，其中

$$u=-1,v=m+1,$$
$$u_i=2m-i+2(i=1,2,\cdots,m),$$
$$v_1=m$$
$$v_j=m-(m+1)j\quad(j=2,3,\cdots,n)$$(13)

易于证明 $S(m,n)$ 是关于 S 的 $\int\sum-$ 图(13)

注意到，当 $n\geqslant3$ 时，S 及 v_n 满足定理 2 之条件，由 $S(m,n)$ 关于 v_n 进行毛虫扩充所得之毛虫树为 $\int\sum-$ 图；另外，当 $m=1$ 时，也可如此得到当 $d_1=1$ 时的毛虫树为 $\int\sum-$ 图，所以为证所有毛虫树均为 $\int\sum-$ 图，我们仅需考虑 $n=1$ 与 2 以及 $d_1\geqslant2$ 的情形，为此，给出下面 2 引理(13)

引理 4 当 $d_1\geqslant2,d_3\geqslant1$ 时，$S(d_1,0,d_3)$ 是 $\int\sum-$ 图(13)

证明 取 $S=\{-5,5d_1,9-5i(i=1,2,\cdots,d_1+2),-1-5d_1(j+1)\quad(j=1,2,\cdots,d_3-1)\}$，易于验证 $S(d_1,o,d_3)$ 是关于 S 的 $\int\sum-$ 图(13)

在**引理 4** 的整数集 S 中，若 $d_3=1$，则 $w=9-5(d_2+2)$ 对应悬挂点满足**定理 2** 之要求；若 $d_3\geqslant2$，则 $w=-1-5d_1d_3$ 对应悬挂点满足**定理 2** 之要求，所以 $S(d_1,o,d_3)$ 可关于 w 进行毛虫扩充(13)

引理 5 当 $d_1\geqslant2,d_3\geqslant1$ 时，$S(d_1,1,d_3)$ 是 $\int\sum-$ 图(13)

证明 取 $S=\{-5,5d_1,6,9-5i(i=1,2,\cdots,d_1+2),-1-5d_1(j+1)(j=1,2,\cdots,d_3-1)\}$，易于验证 $S(d,1,d_3)$ 是关于 S 的 $\int\sum-$ 图(13)

与引理 4 一样，在上述情况下，$S(d_1,1,d_3)$ 可以关于 $w=9-5(d_1+2)$ 或 $-1-5d_1d3$ 进行毛虫扩充(13)

综合**定理 2** 与**引理 3～5**，我们有

定理 6 所有毛虫树 T 均为 $\int\sum-$ 图，即 $\zeta(T)=0$(13)

[参 考 文 献]

[1] Harary F, Sum graphs over all the integers[J]. Discrete Math, 1994, (124): 99～105.

[2] Harary F, Sum graphs and difference graphs[J]. Congr. Numer, 1990(72): 101～108

[3] Harary F, Graph Theory[M]. Addison. Wesley, Reading, 1969.

[4] Baogan X, On integral sum graphs[J]. Discrete Math, 1999(194): 285～194.

The Integral Sum Number of Caterpillars

DENG Yi-xiong[1]，ZHOU Shang-chao[1]，XU Bao-geng[1]，NIE Ying[2]

(1. Basic Courses Department 2. Teaching affairs office East China Jiaotong University Nanchang 330013, China)

Abstract: Given a graph $G=(V,E)$, If there exists a set $S\subseteq Z$ such that $V=S$ and $uv\in E$ $(u,v\in V)$ if and only if $u+v\in S$, then G is $\int\sum$ - graph (Integral sum graph). The $\int\sum$ - number (Integral sum number) $\zeta(G)=\min\{t \mid G\cup tK_1$ is Integral sum graph$\}$. This concept is introduced by [1]. This paper proved: all caterpillars is $\int\sum$ - graphs, and the conjecture "all tree T that satisfy $\zeta(T)=0$ is caterpillars" is false.

Key words: Tree; Caterpillars; $\int\sum$ - graph; $\int\sum$ - number

---

上接第 67 页

[参 考 文 献]

[1] Ore, Invitation To Number of Theory[M]. 中译本，有趣的数论，北京大学出版社，1985.

[2] 华罗庚. 数论导引[M]. 科学出版社. 1997.

[3] 王　元. 谈素数[M]. 上海教育出版社. 1978.

[4] 何　召. 孙琦. 初等数论 100 例[M]. 上海教育出版社. 1980.

[5] 周尚超. 亲和数[J]. 华东交通大学学报. 1998, (2).

15 Friendly Numbers

ZHOU shang-chao, LIU Er-gen, DENG Yi-xlong, JIANG Zhi-yong

(Basic Courses Department, East China Jiaotong Vniversity, Nanchang 330013, Chiua)

Abstract: In this paper, we gave 15 friendly numbers.

Key wards: number theory; friendly number; complete mumber