

文章编号:1005-0523(1999)03-0078-04

关于混合凹-凸算子不动点定理

盛梅波¹, 董祥南²

(1. 华东交通大学基础课部, 江西南昌 330013; 2. 江西师范大学数学系, 江西南昌 330027)

摘要: 本文先提出了关序 Banach 空间的混合凹-凸算子的概念, 并在序条件下讨论这类算子的不动点, 得出了新的(耦合)不动点定理^[19].

关键词: 混合凹-凸算子; 混合单调算子; (正则)锥; (耦合)不动点; 半序 Banach 空间

中图分类号: O 177.91

文献标识码: A

1 基本概念

设 E 是实 Banach 空间, $D \subseteq E$, P 是 E 中锥, " $\leq$ " 是由 P 导出的半序, 即 $\forall x \in E, y \in E, x \leq y$ 当且仅当 $y - x \in P$ ^[13]

定义 1^[2] 设算子 $A: D \rightarrow E$, 称 A 是 D 上的凹算子(依 Amann 意义), 如果满足

$$A(tx + (1-t)y) \geq tA(x) + (1-t)A(y) \quad (1)$$

对 $\forall t \in (0, 1], \forall x \in D, y \in D$ 且 $x \leq y$ ^[13]

定义 2 设算子 $A: D \times D \rightarrow E$, 如果对任意的 $x \in D, A(x, \cdot)$ 是 D 上的凸算子, 对 $\forall y \in D, A(\cdot, y)$ 是 D 上的凹算子, 则称 $A(x, y)$ 是 $D \times D$ 上的混合凹-凸算子^[13]

注 1 其中(1)中不等式反向不等式成立的算子为凸算子, 定义 2 中若 $E = R^n$, 则 A 称为凹-凸函数, 见文献[3]^[13]

注 2 类似地, 可定义混合凸-凹算子^[13]

定义 3^[5] 设 $A: D \times D \rightarrow E$, 如果 $\forall x \in D, A(x, \cdot)$ 是减算子, $\forall y \in D, A(\cdot, y)$ 是增算子, 则称 A 是 $D \times D$ 上的混合单调算子^[13]

定义 4^[5] 设算子 $A: D \times D \rightarrow E$, 如果存在点对 (x^*, y^*) , 满足

$$A(x^*, y^*) = x^*, \quad A(y^*, x^*) = y^* \quad (2)$$

则称点对 (x^*, y^*) 是 A 的耦合不动点^[13]

注 3 定义 4 中, 若 $x^* = y^*$, 即有 $A(x^*, x^*) = x^*$, 则称 x^* 是 A 的不动点^[13]

2 主要结果

定理 1 设 D 是 E 中序有界闭凸集, P 是 E 中弱正则锥, $A: D \times D \rightarrow E$ 是弱连续, 混合单

收稿日期: 1999-01-18; 修订日期: 1999-01-20

基金项目: 江西省自然科学基金资助项目^[13] (3000009702)

中国知网 <https://www.cnki.net>

作者简介: 盛梅波(1966), 男, 江西波阳人, 华东交通大学基础课部讲师^[13]

调且混合凹-凸算子⁽¹³⁾如果存在 $u^0 \in D, v^0 \in D$,

使

$$u^0 \leq A(u^0, v^0) \leq A(v^0, u^0) \leq v^0 \quad (3)$$

则 A 在 D 中存在耦合不动点

证明 首先构造 Ishikawa 迭代序列, 任取一序列 $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$, 使 $\alpha_n \rightarrow \alpha \in (0, 1), n \rightarrow \infty$, 令

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= u^0, y_0 = v^0 \\ x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) A(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ y_{n+1} &= \alpha_n y_n + (1 - \alpha_n) A(y_n, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由于 D 是凸集, 故 $x_n \in D, y_n \in D$ ⁽¹³⁾又(3)式成立以及 A 是混合单调的, 利用数学归纳法易证 $x_n \leq y_n (n = 0, 1, \dots)$ ⁽¹³⁾下证:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad &x_n \leq A(x_n, y_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 2) \quad &A(y_n, x_n) \leq y_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 3) \quad &x_n \leq x_{n+1} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 4) \quad &y_{n+1} \leq y_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

事实上, 当 $n=0$ 时, 由(3)式可得(5)式成立⁽¹³⁾设 $n=k$ 时, (5)式成立, 即

$$\left. \begin{aligned} x_k &\leq A(x_k, y_k), \quad A(y_k, x_k) \leq y_k, \\ x_k &\leq x_{k+1}, \quad y_{k+1} \leq y_k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

那么当 $n=k+1$ 时, 由(6)式及 A 的混合凹-凸、混合单调性, 我们有

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \alpha_k x_k + (1 - \alpha_k) A(x_k, y_k) \leq \alpha_k A(x_k, y_k) + (1 - \alpha_k) A(A(x_k, y_k), y_k) \\ &\leq A(\alpha_k x_k + (1 - \alpha_k) A(x_k, y_k), y_k) = A(x_{k+1}, y_k) \leq A(x_{k+1}, y_{k+1}) \quad (13) \\ A(y_{k+1}, x_{k+1}) &\leq A(y_k, x_{k+1}) = A(y_k, \alpha_k x_k + (1 - \alpha_k) A(x_k, y_k)) \\ &\leq \alpha_k A(y_k, x_k) + (1 - \alpha_k) A(y_k, A(x_k, y_k)) \leq \alpha_k y_k + (1 - \alpha_k) A(y_k, A(x_k, y_k)) \\ &\leq \alpha_k y_k + (1 - \alpha_k) A(y_k, x_k) = y_{k+1} \\ x_{k+2} - x_{k+1} &= \alpha_{k+1} x_{k+1} + (1 - \alpha_{k+1}) A(x_{k+1}, y_{k+1}) - x_{k+1} \\ &= (1 - \alpha_{k+1}) (A(x_{k+1}, y_{k+1}) - x_{k+1}) \geq 0 \\ y_{k+2} - y_{k+1} &= \alpha_{k+1} y_{k+1} + (1 - \alpha_{k+1}) A(y_{k+1}, x_{k+1}) - y_{k+1} \\ &= (1 - \alpha_{k+1}) (A(y_{k+1}, x_{k+1}) - y_{k+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

综合上述可知(5)式成立⁽¹³⁾

又因 P 是弱正则锥, 由(5)式可知存在 $x^* \in E, y^* \in E$, 使 $x_n \xrightarrow{\omega} x^*, y_n \xrightarrow{\omega} y^*$, 而 D 是闭凸集, 从而 $x^* \in D, y^* \in D$ ⁽¹³⁾因为 A 弱连续的, 故有

$$A(x_n, y_n) \xrightarrow{\omega} A(x^*, y^*), A(y_n, x_n) \xrightarrow{\omega} A(y^*, x^*)$$

在(4)式的两端取弱极限, 则有

$$x^* = \alpha^* + (1 - \alpha^*) A(x^*, y^*), y^* = \alpha^* + (1 - \alpha^*) A(y^*, x^*) \quad (13)$$

又 $\alpha \in (0, 1)$ ⁽¹³⁾从而有 $x^* = A(x^*, y^*), y^* = A(y^*, x^*)$ ⁽¹³⁾即 (x^*, y^*) 是 A 的耦合不动点⁽¹³⁾

定理2 设 D 是 E 中序有界闭凸集, P 是 E 中正则锥, $A: D \times D \rightarrow E$ 是混合单调且混合凹-凸算子, 如果存在 $u^0 \in D, v^0 \in D$, 使得(3)式成立, 且存在常数 $L \in (0, 1)$, 使得 $\forall x, y \in D$, 有

$$x \leq y \Rightarrow A(y, x) - A(x, y) \leq L(y - x) \quad (7)$$

则 A 在 D 中存在不动点⁽¹³⁾

证明 首先构造 Ishikawa 型迭代序列, 任取一序列 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1]$, 使 $\alpha_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, 令

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= u_0, y_0 = v_0 \\ x_{n+1} &= \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) A(x_n, y_n), n = 0, 1, 2, \dots \\ y_{n+1} &= \alpha_n y_n + (1 - \alpha_n) A(y_n, x_n), n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

则妨定理 1 的证明可知

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad & x_n \in D, y_n \in D \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 2) \quad & x_n \leq y_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 3) \quad & x_n \leq A(x_n, y_n) \leq A(y_n, x_n) \leq y_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 4) \quad & x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

于是由 (9) 式中 4) 及 P 的正则性知存在 $x^* \in E, y^* \in E$, 使 $x_n \xrightarrow{s} x^*, y_n \xrightarrow{s} y^*$, 且 $x_n \leq x^* \leq y^* \leq y_n, n = 0, 1, 2, \dots$ ⁽¹³⁾ 由于 A 是混合单调的, 故

$$x_n \leq A(x_n, y_n) \leq A(x^*, y_n) \leq (x^*, y^*) \leq (x^*, y^*) \leq A(y_n, x^*) \leq A(y_n, x_n) \leq y_n$$

从而有

$$x^* \leq A(x^*, y^*) \leq A(y^*, x^*) \leq y^* \quad (10)$$

由 (7) 式及 (9) 中 2) 知

$$\begin{aligned} \theta &\leq y_{n+1} - x_{n+1} = \alpha_n(y_n - x_n) + (1 - \alpha_n)(A(y_n, x_n) - A(x_n, y_n)) \leq \\ &\alpha_n(y_n - x_n) + (1 - \alpha_n)L(y_n - x_n) = \gamma_n(y_n - x_n) \end{aligned}$$

其中 $\gamma_n = \alpha_n + (1 - \alpha_n)L$ ⁽¹³⁾ 即有 $0 < \gamma_n = L + (1 - L)\alpha_n \leq 1$, 且 $\gamma_n \rightarrow \alpha + (1 - \alpha)L = L(1 - L) < 1$, 故存在 $\gamma < 1$ 及 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, 有 $0 < \gamma_n < \gamma < 1$, 因此

$$\theta \leq y_{n+1} - x_{n+1} \leq \gamma_n(y_n - x_n) < \gamma(y_n - x_n) <$$

$$\gamma(y_{n-1} - x_{n-1}) < \dots < \gamma^{-N_0+1}(y_{N_0} - x_{N_0}) \xrightarrow{s} \theta$$

$(n \rightarrow +\infty)$, 又 $y_{n+1} - x_{n+1} \xrightarrow{s} y^* - x^*, (n \rightarrow +\infty)$ ⁽¹³⁾ 由极限的唯一性有 $y^* - x^* = \theta$ 即 $y^* = x^*$ ⁽¹³⁾

由 (10) 式可知 $x^* = A(x^*, y^*) = A(y^*, x^*) = y^*$, 从而 $x^* = A(x^*, x^*)$ 是 A 在 D 中的不动点⁽¹³⁾

[参 考 文 献]

- [1] 郭大钧¹⁹. 非线性泛函分析[M]¹⁹. 济南: 山东科学技术出版社, 1985¹⁹.
- [2] Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in order Banach spaces[J]¹⁹. **SIM Review**, 1976, 620~709¹⁹.
- [3] В ФЛЕМЪЯНОВ, П ВВАЦЦПЪЕВ 金洪臻等译¹⁹. 不可微最优化[M]¹⁹. 大连: 大连理工大学出版社, 1991: 203~211¹⁹.
- [4] 李福义, 梁展东¹⁹. Φ 凹(凸)算子不动点定理及其应用[J]¹⁹. **系统科学与数学**, 1994, 14(4): 355~360¹⁹.
- [5] Guo Dajun. Fixed points of mixed monotone operators with applications[J]. **Anal Appl**, 1990, 31: 215~224¹⁹.
- [6] 董祥南, 许绍之¹⁹. 单调凹(凸)算子(正)不动点存在性定理[M]¹⁹. **江西师范大学学报(自然版)**, 1997, 21

(3):255~258 19.

- [7] 盛梅波,董祥南 19. Φ 序 Lipshitz 算子的不动点定理及其迭代逼近[J] 19 华东交通大学学报, 1998, 15(3):70~74 19.

Fixed Point Theorems of Mixed Concave-convex Operators

SHENG Mei-bo¹, DONG Xiang-nan²

(1. Basic Courses Department, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China; 2. Mathematics Department, Jiangxi Normal University, Nanchang, 330027, Chian)

Abstract: In this paper, we give the concept of mixed concave-convex operators in semi-order Banach space, and obtain new fixed point theorems of this kind of operators.

Key words: mixed concave- operators; mixed monotone operators; (regular) cone; fixed point; semi-order Banach space