文章编号:1005-0523(2000)03-0079-04

单机调度问题的复杂性

林淑容[1]，　周荷芳[2]，　周贤伟[3]

(1.四川农业大学 基础课部，四川 雅安　625014;2.西南交通大学 交通运输学院，四川 成都　610031;3.北方交通大学 电子信息工程学院，北京　100044)

摘要:研究一类单台机器具有速度可选择约束的调度问题,这在车辆调度和通信调度中具有广泛的应用,以进一步研究交通和通信中的拥挤和堵赛问题19.引进了有关记号,提出了有关的新概念并给出了该问题解的有关性质,对单台机器问题的有关多项式情形算法进行了论证19.

关　键　词:单台机器;速度;调度;算法

中图分类号:O221　　　**文献标识码:**A

0　引　言

调度问题是一个成果丰富的研究领域,其模型在生产作业安排、车辆调度、通信网络等方面都有广泛的应用[1,2]⒀有时根据不同的要求,加工一零件(泛指任务、计划单元)时还需要附加的资源如设备、人力、资金等,这说明了通过增加或减少附加的资源在较短或较长的持续时间以内加工完一零件[3,4]⒀本文研究了每当加工一零件时,该零件通过对机器不同加工速度的选择而产生不同的附加费用⒀

主要结果:对单机器情形问题 $1|spe.|\sum C_j$ 和问题 $1|spe.|\sum w_jC_j$ 都具有多项式时间算法,但对多台机器情形计算复杂性尚未解决⒀

1　问题的提出

设有 n 个相互独立的零件,其零件集 $J=\{J_1,\cdots,J_n\}$,有 m 台机器 $M_1,M_2,\cdots,M_m$,记为 $M=\{M_1,M_2,\cdots,M_m\}$,零件 J_i 在 M_j 上的标准加工时间为 P_{ji}(机器速度为1的加工时间),$i=1,2,\cdots,n$⒀零件 J_i 在机器 M_j 上加工时的单位速度费用为 $e_{ji}(e_{ji}>0)$,加工时间为 P_{ji}/x_{ji},x_{ji} 可选取 $v_{ji1},v_{ji2},\cdots,v_{jik}$ 之一,将机器 M_j 的速度集合记为 Ω_j,即 $x_{ji}\in\Omega_j$⒀问怎样选取速度 x_{ji},且给零件安排一加工顺序可使指定的目标函数得到最优⒀

假设每一台机器在加工一零件时若一旦开始加工,则一直将该零件加工完为止(不允许零件抢先加工)⒀每一台机器在每一时刻只能加工一零件,每一时刻每一零件只能被一台机器加工⒀我们把"机器速度"作为一种约束,并提议以 speed 的 spe.⒀例如 $1|r_j,spe.|C_{\max}$,$1|spe.$

收稿日期:2000-06-13;**修订日期:**2000-08-25

作者简介:林淑容(1964-),女,四川威远人,四川农业大学讲师⒀

$\sum C_j$，1|spe.|$\sum w_j C_j$ 等⒀零件集 J 的速度向量 $\boldsymbol{x}=(x_{11},x_{21},\cdots,x_{m1},x_{12},x_{22},\cdots,x_{m2},\cdots,x_{1n},x_{2n},\cdots,x_{mn})$，$x_{ji}\in\Omega_j$，$J=1,2,\cdots,m$，全体速度向量的集合记为 $\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(x_{11},x_{12},\ldots,x_{mn}),x_{ji}\in\Omega_j,J=1,\cdots,m.\}$，●$=\{\pi\mid$零件的所有置换$\}$为加工零件的置换集合，任意一对$(x,\pi)$称为问题的解，能使问题指定的目标函数达到最优的解$(x,\pi)$称为问题的最优解⒀假设每一对$(x,\pi)$唯一确定每一零件 $J_j\in J$ 的一完工时间 C_j⒀本文所使用的目标函数为正则目标函数，即零件定额完工时间 C_j 的单调递增函数⒀在机器速度可选择的调度问题中考虑两种费用⒀

第一种叫完工费用 $F_1(x,\pi)$，对给定的(x,π)，$F_1(x,\pi)$是由零件 J_j 的完工时间刻划⒀令 f_j 是关于 C_j 的一递增函数，且

$$f_{\max}(C_1,C_2,\cdots,C_n)=\max_{J_j\in J}\{f_j(C_j)\};\ \sum f_j(C_1,C_2,\cdots,C_n)=\sum_{J_j\in J}f_j(C_j)$$

则 $F_1\in\{f_{\max},\sum f_j\}$⒀本文使用的完工费用函数 f_j 有 $f_j(C_j)=C_j$(完工时间)；$f_j(C_j)=C_j-d_j=L_j$(迟后时间)

第二种叫总的附加费用 $F_2(x)=\sum e_{ji}x_{ji}$，对任一 $x\in X$，$F_2(x)$ 叫速度费用，其中 e_{ji} 称为在 M_j 上加工零件 $J_i\in J$ 时的单位速度费用⒀

由上分析知，对任一对(x,π)，总的调度费用为 $K(x,\pi)$、$F_1(x,\pi)+F_2(x)$⒀本文考虑最小费用调度：求 $x^*\in X$，$\pi^*\in$●，使

$$K(x^*,\pi^*)=\min\{K(x,\pi)\mid x\in X,\pi\in●\}$$

注意：在单台机器调度问题怀，p_{ji}，e_{ji}，v_{ji}，x_{ji} 等记号去掉下标 j，使用 p_i，e_i，v_i，x_i 记号，Ω_j 记为 Ω⒀

2 问题 1|spe.|$\sum w_j C_j$

就单台机器速度可选择的以带权的完工时间之和为目标函数的调度问题 1|spe.|$\sum w_j C_j$，对于给定的一解(x,π)，总的调度费用为

$$K(x,\pi)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{i=i}^{n}w_{\pi(t)}p_{\pi(i)}/x_i+e_{\pi(i)}x_i\Big]$$

其中 $\pi=(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$，$x=(x,\cdots,x_n)$⒀

引理 1 对任意最优解(x,π)，若零件 J_i 处在位置$(\pi(i))$，则必有

$$\left(\sum_{i=i}^{n}w_{\pi(t)}\right)p_{\pi(i)}\Big/x_i+e_{\pi(i)}x_i=\min_{v\in\Omega}\left\{\left(\sum_{i=i}^{n}w_{\pi(t)}\right)p_{\pi(i)}\Big/v+e_{\pi(i)}v\right\}$$

定理 1 就问题 1|spe.|$\sum w_iC_i$ 而言，任意最优解(x,π)必满足如下条件：

a
$$\left(\sum_{t=i}^{n}w_{\pi(t)}\right)p_{\pi(i)}\Big/x_i+e_{\pi(i)}x_i>\min_{v\in\Omega}\left\{\left(\sum_{t=i}^{n}w_{\pi(t)}\right)p_{\pi(i)}\Big/v+e_{\pi(i)}v\right\}$$

b
$$=p_{\pi(i)}/w_{\pi(i)}x_i\leqslant p_{\pi(i+1)}/w_{\pi(i+1)}x_{i+1}$$

证明 若(x,π)为最优解，则由引理 1 知必有(i) 成立⒆若条件(ii) 不成立则考虑 $p_{\pi(i)}=p_{\pi(i)}/x_i$ 的标准单机调度问题⒀由 $p_{\pi(i)}/wp_{\pi(i)}>p_{\pi(i+1)}/w_{\pi(i+1)}$ 及单台机器调度问题的已知结果，有

$K(x,\pi) < K(x,\pi)$,其中 $\pi=(\pi(1),\cdots,\pi(i-1),\pi(i+1),\pi(i),\pi(i+2),\cdots,\pi(n))$,$x=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},x_i,x_{i+2},\cdots,x_n)$,与$((x,\pi)$ 的最优解相矛盾⒀

定理 2　就问题 $1|spe.|\sum w_iC_i$ 而言,若解(x,π) 满足条件:

a.
$$\left(\sum_{t=i}^{n} w_{\pi(t)}\right) p_{\pi(i)}/x_i + e_{\pi(i)}x_i = \min_{v\in\Omega}\left\{\left(\sum_{t=i}^{n} w_{\pi(t)}\right) p_{\pi(i)}/v + e_{\pi(i)}v\right\}$$

b.
$$p_{\pi(i)}/w_{\pi(i)}x_i \leqslant p_{\pi(i+1)}/x_{i+1}$$

则(x,π) 为最优解⒀

证明　显然对于任何满足定理条件的不同解都有相同的目标函数⒀说明(x,π) 为最优解⒀

算法:

1) 给零件重新编号,使得 $p_1/w_1 \leqslant p_2/w_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n/w_n$. 记 $\pi=(1,2,\cdots,n)$⒀

2) 求 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,使得

$$\left(\sum_{t=i}^{n} w_{\pi(t)}\right) p_{\pi(i)}\Big/x_i + e_{\pi(i)}x_i = \min_{v\in\Omega}\left\{\left(\sum_{t=i}^{n} w_{\pi(t)}\right) p_{\pi(i)}\Big/v + e_{\pi(i)}v\right\}$$

3) 若对 $i=1,2,\cdots,n$ 都有

a.
$$\left(\sum_{t=i}^{n} w_{\pi(t)}\right) p_{\pi(i)}\Big/x_i + e_{\pi(i)}x_i = \min_{v\in\Omega}\left\{\left(\sum_{t=i}^{n} w_{\pi(t)}\right) p_{\pi(i)}\Big/v + e_{\pi(i)}v\right\}$$

b.
$$p_{\pi(i)}/w_{\pi(i)}x_i \leqslant p_{\pi(i+1)}/x_{i+1}$$

则停止⒀否则转(3)

4) 求 π',以使按 $\{p_{\pi(i)}/w_{\pi(i)}x_i\}$递增加的顺序加工零件得一调度 π',记 $\pi:=\pi'$,转(1)⒀

定理 3　就问题 $1|spe.|\sum w_iC_i$ 而言,该算法在有限步以内收敛⒀

当零件 J_i 的权 $w_i=1(i=1,2,\cdots,n)$ 时,问题 $1|spe.|\sum w_iC_i$ 退变为问题 $1|spe.|\sum C_i$⒀但我们下面从图论角度证明问题 $1|spe.|\sum C_i$ 为 p 问题⒀

就问题 $1|spe.|\sum C_i$ 而言,假设对任意给定的解(x,π) 目标函数为

$$K(x,\pi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{i} p_{\pi(t)}/x_i + \sum_{t=1}^{n} e_{\pi(t)}x_i = \sum_{t=1}^{n}\left[(n+1-i)p_{\pi(t)}/x_i + e_{\pi(i)}x_i\right]$$

其中 $\pi=(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$,$x_i\in\Omega$⒀

下面构造问题 $1|spe.|\sum C_i$ 的匹配模型,赋权完全偶图 $K_{n,n}=G(U,V,E)$,其中 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$代表 n 个零件,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$代表零件的 n 个位置,$E=\{(u_i,v_i)|u_i\in U,v_j\in V\}$代表由顶点 u_i 到顶点 v_j 的边,定义边(u_i,v_j) 的权 $w_{ij}=\min_{v\in\Omega}\{(n+1-j)p_i/v+e_iv\}$,问题可归结为求赋权 $K_{n,n}$ 完全偶图的最小完美匹配⒀

定理 4　问题 $1|spe.|\sum C_i$ 为 p 问题⒀

因为求解赋权 $K_{n,n}$ 完全偶图的最小权完美匹配,已有匈牙利算法[2],其算法的复杂性为 $O(n^3)$⒀但是由问题 $1|spe.|\sum w_iC_i$ 的算法易得出求问题 $1|spe.|\sum C_i$ 局部最优解的简易算法⒀

3 计算复杂性问题

根据前面的讨论,单台机器速度可选择的调度问题 $1|spe.|\sum C_j$ 和问题 $1|spe.|\sum w_i C_j$ 均有多项式时间算法,即所谓 p 问题[13]类似地可讨论问题 $1|spe.|C_{\max}$, $1|r_j, spe.|C_{max}$ 和问题 $2|F|spe.|C_{max}$ 也是 p 问题[13]但对于其多台机器情形问题是不是 NPC 的,我们尚不知道[13]

[参 考 文 献]

[1] Papadimitrou C H. Comdinatorial optimization algorithms and complexity[M]. Printice-Hall 1982.

[2] Lawler, E. L. Lenstra, J. K. Rinnooy Kan, A. H. G. and Shmoys, D. B. Sequencing and scheduling algorithms and complexity[R]. Report BS-R8909, Centre for Machemaths & computer sciences, Amsterdam 1989.

[3] Blazewica J. Selected Topice in scheduling Theory[J]. Ann. Disc. Math. 1987, 31(1): 1~60.

[4] Nowicki and Zdrzalka. A surey of results for sequencing problems with controllable processing times [J]. Discrete Applied Mademotics. 1990, 26: 271~287.

Complexity of Single Machine Scheduling Problems

LING Shu-rong[1], ZHOU He-fang[2], ZHOU Xian-wei[3]

(1. Department of Basic Courses, Sichuan Agriculture University, Yaan 625014 China; 2. School of Transportation and Traffic, Southwest Jiaotong University, Chengdu, 610031; 3. School of Electronic and Information Engineering, Northern Jiaotong University, Beijing 100044 China)

Abstract: This paper studies scheduling problems of a type of single machine with selectable machine speeds, which are quite common in bus and communications scheduling. Thus a congesting and jamming model of traffic is studied. Marks are introduced new concept is put forward and some properties of solution are given. Polynomial case algorithm of single machine is proved. In the case of $m=1$, polynomial algorithms are presented.

Key words: single machine; selectable machine speeds; scheduling problem; polynomial algorithms