文章编号:1005 - 0523 (2002) 01 - 0055 - 03

关于图的符号边控制数的上界

徐保根,曾　毅

(华东交通大学 基础科学学院,江西南昌　330013)

摘要: 本文给出了 n 阶图的符号边控制数的上界,并提出了相关的若干问题和猜想.

关　键　词: 符号边控制函数,符号边控制数 .

中图分类号: O157. 5　　文献标识码: A

1　引言及定义

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[1].

设 G 为一个图, 则 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别为其顶点集和边集. 对于 $u\in V(G)$, 则 $N[u]$ 和 $N_G[u]$ 分别表示点 u 在 G 中的邻域和闭邻域, $d_G(u)=|N_G[u]|$ 为 u 点在 G 中的度. 对于 $S\subseteq V(G)$, 则 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图.

对于 $e\in E(G)$, 用 $N_G(e)$ 表示在 G 中与 e 相邻的边的集合, 称为 e 在 G 中的边邻域. 并称 $N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$ 为 e 的闭边邻域. 即: 若 $e=uv\in E(G)$, 则 $N_G[e]=\{u^1v^1\in E(G)\mid u^1=u$ 或 $v^1=v\}$. 在不会混淆的情况下, $N_G(e)$ 和 $N_G[e]$ 分别简记 $N[e]$ 和 $N[e]$.

定义 1[2] 设 $G=(V,E)$ 为一个非空图, 一个双值函数: $f: E\to\{+1,-1\}$ 如果满足条件

$$\sum_{e^1\in N[e]} f(e^1)\geqslant 1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

对一切 $e\in E(G)$ 成立, 则称 f 为图 G 的一个符号边控制函数. 图 G 的符号边控制数被定义为 $\gamma'_s(G)=min\{\sum_{e^1\in N[e]} f(e^1)\mid f$ 为 G 的符号边控制函数$\}$. 对于空图 $\overline{K_n}$, 定义 $\gamma^1_s(\overline{K_n})=0$.

如果将 $N_G[e]$ 作为 e 的一个 '局部 ', 则(1) 式表明: 在 f 下, $+1$ 的边是 '局部占优 '的 . 但在整个图 G 上, $+1$ 边未必占优. 即图的符号边控制数可能为负整数. 如:

例 1 设 G 为 K_4 及其每个顶点上增加 2 条悬挂边所得的图. 定义 $f(e)$ 如下: $\forall e\in E(K_4)$, $=1$; 对每一条悬挂边(共有 8 条) e, 定义 $f(e)=-1$; 得出 $\gamma^1(G)\leqslant\sum_{e^1\in N[e]} f(e)=6-8=-2$.

按定义 1 不难看出: 对任意图, 均有 $|\gamma^1_s(G_1)|\leqslant|E(G)|$. 并且易见

引理 1 对任意两个不交的图 G_1 和 G_2, 均有 $\gamma^1_s(G_1UG_2)=\gamma^1_s(G_1)+\gamma^1_s(G_2)$.

近几年来, 图的控制理论研究的内容越来越丰富, 传统的控制数概念[3 ~ 4]已经有了许多转化形式, 如符号控制[5 ~ 6], 减控制[7], 主控制[8]等. 然而, 他们均属于图的点控制, 很少有图的边控制概念. 文[2]中首先定义了一种边控制概念——符号边控制, 并确定了所有 m 条边的图的最小符号边控制数. 文[2, 9]中给出了图的符号边控制数的一些下界. 但至今为止, 对其上界估计尚未探讨, 而且除了星、路、图和完全图之外, 其它图类的符号边控制数的确切值尚未确定. 本文主要目的是给出 n 阶图的符号边控制数的上界, 并提出若干相关问题及猜想.

2　主要结果

收搞日期 :2001 - 08 - 15
作者简介 :徐保根 (1963 -),男,江西南昌人,教授 .

一个图 G 被称为一个 $\theta-$ 图，如果 G 是由一个圈和一条路构成，且该路的两端点均在这个圈上．不难看出：

引理 2 任何一个 $\theta-$ 图至少包含一个偶圈．

图 G 的一条迹是 G 中的一条边不相交（点可以相交）的通道．如果一条迹的两端点重合，称之为闭迹．长度为偶数（奇数）的闭迹称之为偶（奇）闭迹．

定理 1 对任意 n 阶图 G，均有

$\gamma_s'(G) \leqslant \left[\frac{7}{3}n-2\right]$ 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数．

证：对任意两个正整数 n_1 和 n_2，显然 $\left[\frac{7}{3}n_1-2\right]+\left[\frac{7}{3}n_2-2\right] \leqslant \left[\frac{7}{3}(n_1+n_2)-2\right]$ 由引理 1，可以设 G 为一个 n 阶连通图．

设 T 为 G 的一棵生成树，令 $G_0=G-E(T)$ 为 G 的一个生成子图．在图 G_0 中去掉所有边不交的偶闭迹的边（这些偶闭迹记为 D_1、$D_2\cdots D_r$），得到的图记为 G_1．即 G_1 为 G 的一个 n 阶子图（生成子图），且 G_1 中不含任何偶闭迹，当然 G_1 中也不含偶圈．

设 G_1 中共有 t 个奇圈，记为 C_{S1}、C_{S2}、$\cdots C_{ST}$．下面证明：这 t 个奇圈是两两点不相交的．

（反证）若存在两个奇圈 C_{Si} 和 C_{Sj}，它们恰有一个公共顶点；则显然它们构成一条闭迹，其长度 S_i+S_j 为偶数，这与 G_1 的定义矛盾．若存在两个奇圈，它们有两个或两个以上的公共顶点；则显然它们包含一个 $\theta-$ 图．由引理 2 得知：G_1 包含偶圈，矛盾．

因此，证明了这 t 个奇圈是两两点不相交的．由于每个奇圈至少有 3 个顶点，从而 $t\leqslant\frac{n}{3}$．

令 F 表示 G_1 中去掉这 t 个奇圈的所有边而成的图．因此，F 为一个不含圈的 n 阶图，即为 n 阶森林．$|E(F)|\leqslant n-1$．注意到：

$E(G)=E(T)\cup E(F)\cup E(D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n)$ $E(C_{S_i}\cup C_{St})$，下面定义图 G 的一个符号边控制函数 f 如下：

对于每个 $e\in E(T)\cup E(F)$，定义 $f(e)=+1$．对于任何一条偶闭迹 D_i（$1\leqslant i\leqslant r$）中的边，依次交错地定义的 f 值为 +1 和 −1，即在 f 下，+1 边数与 −1 的边数相同．对于每一个奇圈 C_{sj}（$1\leqslant j\leqslant t$）的边，依次交错地定义 f 的值为 +1 和 −1（恰好只有两条 +1 边相邻），任何两条 −1 边均不邻，即在 f 下，+1 边数比 −1 的边数多 1．不难验证：f 为 G 的一个符号边控制函数，且

$$\gamma'_s(G)\leqslant\sum_{e\in E(G)}f(e)=|E(F)|+|E(T)|+0+t\leqslant n-1+n-1+\frac{n}{3}=\frac{7}{3}n-2.$$

注意到 $\gamma'_s(G)$ 为整数，定理 1 证毕．

定理 2 若 n 阶图 G 不包含偶闭迹，则 $\gamma'_s(G)\leqslant n-1$

证：由引理 1，不妨设 G 为连通图．若 G 为一棵树，则显然 $\gamma'_s(G)\leqslant|E(G)|=n-1$．下设 G 不是树．由于 G 不包含偶闭迹，故不含偶圈．同定理 1 证明一样，得出：G 中任何两个奇圈是点不相交的．设 G 中共有 t 个奇圈 C_{S1}、$C_{S2}\cdots C_{St}$．在每个奇圈 C_{Si} 任取一条边 e_i（$1\leqslant i\leqslant t$），显然 $G-\{e_i|1\leqslant i\leqslant t\}=T$ 为 G 的一棵生成树．定义一个双值函数 f 如下：

$$f(e)=\begin{cases}-1 & \text{当 } e=e_i(1\leqslant i\leqslant t)\\ +1 & \text{当 } e\in E(T)\end{cases}$$

不难验证：f 为 G 的一个符号边控制函数．从而

$$\gamma'_s(G)\leqslant\sum_{e\in E(G)}f(e)=|E(T)|-t=n-1-t\leqslant n-1.$$

定理 2 证毕．

例 2 设 G 为星 $K_{1,n}$ 的一个细分图，即 $K_{1,n}$ 的每条边上增加一个点而成的图．$|V(G)|=2n+1$，$|E(G)|=2n$．显然 G 为一棵树（不含偶闭迹）．不难看出：对 G 的任意一个符号边控制函数 f 及 $e\in E(G)$，均有 $f(e)=1$．因此，$\gamma'_s(G)=|V(G)|-1$．这说明定理 2 给出的上界是最好可能的．

引理 3 若 n 阶图 G 不含偶闭迹，则 $|E(G)|\leqslant\left[\frac{4}{3}n-1\right]$

证：同定理 2 证明一样，G 中的奇圈是两两点不相交的．故奇圈个数 $t\leqslant\frac{n}{3}$．每个奇圈上去掉一条边后得到一棵树 T，从而有 $|E(G)|=|E(T)|+t\leqslant n-1+\frac{n}{3}=\frac{4}{3}n-1$．引理 3 证毕．

定理 3 若 n 阶图 G 的所有点的度均为奇数，则 $\gamma'_s(G)\leqslant\left[\frac{4}{3}n-1\right]$．

证：不妨设 G 为连通图，在 G 中去掉所有的偶闭迹的边，得到图名．由于每个顶点在 G 中的度均为奇数，故 $\delta(G_0)\geqslant 1$．定义 G 的一个双值函数 f 如下：对于每条（所去掉的）偶闭迹的边，依次交错地定义 f 的值为 +1 和 −1，对于 G_0 中的每条边 e 定义 f

$(e)=1$. 不难验证 f 为 G 的一个符号边控制函数,且由引理 3 得:

$$\gamma'_s(G) \leqslant \sum_{e\in E(G)} f(e) = |E(G_0)| + O \leqslant \left[\frac{4}{3}n - 1\right]$$

定理 3 证毕.

定理 4　对任意 n 阶二部图 G, 均有 $\gamma'(G) \leqslant 2n-2$.

证: 不妨设 G 为连通二部图. T 为 G 的一棵生成树. 记 $G_0 = G - E(T)$, 设 G_0 中共有 t 个边不相交的偶圈, 记为 D_1、D_2…、D_t. 在 G_0 中去掉这 t 个偶圈的边得到一个无圈图(森林) F. 定义 G 的一个符号边控制函数如下:

对于每个偶圈 D_i 的边, 依次交错地定义 f 的值为 $+1$ 和 -1, 故 $\sum_{e\in E(G)} f(e) = 0 \ (i=1, 2, \cdots, t)$.

对于每一条边 $e \in E(T) \cup E(F)$, 定义 $f(e) = 1$. 从而有

$$\gamma'_s(G) \leqslant \sum_{e\in E(G)} f(e) = |E(T)| + |E(F)| \leqslant n - 1 + n - 1 = 2n-2.$$

定理 4 证毕.

3　若干问题与猜想

在本文给出的符号边控制数的上界中, 除定理 2 之外, 其余上界并非最好可能的. 如何改进这些上界有待于探讨.

猜想 1　对任意 n 阶图 G, 均有 $\gamma'_s(G) \leqslant n-1$. 如果这个猜想是对的, 则例 2 说明了当 n 为奇数时, 此界不可再改进.

猜想 2　对任意非空二部图 G, $\gamma'_s(G) \geqslant 1$.

文[9]中证明了: 当 G 为树时, $\gamma'_s(G) \geqslant 1$. 虽然文 [2, 9] 中给出了联系到不同参数的下界, 并且[2] 中确定了 m 条边的图的最小符号边控制数, 但仅与 n 相关的下界并不是最好可能的.

问题 1[2]　确定 n 阶图的最小符号边控制数.

在引言中说到, 到目前为止除了路、星、圈和完全图之外, 其它图类的符号边控制数尚未确定.

问题 2　确定轮 和完全二部图 的符号边控制数.

参考文献:

[1] Bondy. J. A. and Murty U. S. R., Graph Theory with Application[M]. Macmillan, London, 1977.

[2] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math. 239(2001) 179 ~ 189

[3] Baogen Xu, E. J. Cockayne, T. W. Haynes, S. T. Hedelniemi, Shangchao Zhou, Extermal graphs for inequalities involving domination paramelers[J]. Discrete Math. 216(2000) 1 ~ 10.

[4] Baogen XuBaogenXuShangchaoZhou,Characterizationofconnected graphs with maximum domination number [J]. 数学研究与评论. 4(2000) 523 ~ 528.

[5] Zhongfu Zhang, Baogen Xu, Yinzhen Li, Linzhong Liu, A note on the lower bounds of signed domination number of a graph[J]. Discrete Math. 195 (1999) 295 ~ 298.

[6] J. H. Hallingh, E. Ungerer, The signed and minus k - sub domination numbers of comets[J]. DiscreteMath. 183(1998) 141 ~ 152.

[7] E. J. Cockayne, C. M. Mynhardt, on a generaliza tion of signed dominating function of graphs, Ars. Combin. 43(1996) 235 ~ 245.

[8] I. Broere J. H. Hattingh, M. A. Henning, A. A. Mcrae, Majority domination in graphs, Discrete Math. 138(1995) 125 ~ 135.

[9] Baogen Xu, Ergen Liu, On the lower bounds of signed edge domination numbers of graphs, Discrete Math. Submitted.

On the Super Bounds of Signed Edge Domination Numbers in Graphs

XU Bao-gen,　ZENG Yi

(School of Natural Science, East China Jiaotong Univ., Nanchang 330013, China)

ABSTRACT: Some super bounds for signed edge domination numbers of graphs are given, several corresponding problems and conjectures are presented.

Key words: signed edge domination function, signed edge domination number.