文章编号:1005-0523(2003)02-0102-04

关于图的符号边控制数

徐保根

(华东交通大学 数学系,江西 南昌 330013)

摘要:设 G 为一个 n 阶连通图,$m=|E(G)|$,Δ 和 δ 分别为图 G 的最大度和最小度,给出了图 G 的符号边控制数的一个下界,即 $\gamma'_s(G)\geq\lceil\frac{m-(\Delta-\delta)(\Delta-2)(n-\delta)}{2\Delta-1}\rceil$,并确定了几类特殊图的符号边控制数.

关　键　词:符号边控制函数;符号边控制数

中图分类号:O157.5　　　　**文献标识码**:A

1 引　言

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号、术语同于文献[1].

设 $G=(V(G),E(G))$为一个图,$u\in V(G)$,$N_G(u)$和 $N_G[u]$分别表示 u 点在 G 中的邻域和闭邻域,$d_G(u)=|N_G(u)|$为 u 点在 G 中的度.若 $S\subseteq V(G)$,$G[S]$表示 S 在 G 中的导出子图.若 $e=uv\in E(G)$,则 $N_G(e)=\{e'\in E(G)|e'$与e 相关联$\}$称为 e 的边邻域,$d_G(e)=|N_G(e)|$称为 e 在 G 中的边度,即与 e 相关联的边数.$N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$称为 e 的闭边邻域.不难看出:对任意 $e=uv\in E(G)$,$d_G(e)=d_G(u)+d_G(v)-2$.

定义1[2]　设 $G=(V,E)$为一个非空图,一个双值函数 $f:E\longrightarrow\{+1,-1\}$被称为 G 的一个符号边控制函数,如果对任意 $e\in E$ 均有 $\sum_{e'\in N_G[e]}f(e')\geq 1$ 成立.图 G 的符号边控制数被定义为

$$\gamma'_s(G)=\min\{\sum_{e\in E}f(e)\,|\,f\text{ 为 }G\text{ 的符号边控制函数}\}$$

由定义可见,对任意非空图 G,均有 $-|E(G)|\leq\gamma'_s(G)\leq|E(G)|$.自然地定义空图$\overline{K_n}$的符号边控制数$\gamma'_s(\overline{K_n})=0$.对于任意两个点不相交的图 G_1 和 G_2,显然有 $\gamma'_s(G_1\cup G_2)=\gamma'_s(G_1)+\gamma'_s(G_2)$,因此,我们只需研究连通图的符号边控制数.

近些年来,图的多种控制概念在不同程度上得到了研究[3~6],然而,它们均属于图的点控制问题.文[2]中首先引入了图的边控制概念,即符号边控制概念.确定了 m 条边的图的最小符号边控制数.并提出了确定 n 阶图的最小符号边控制数问题,这一问题似乎是非常困难的.研究中我们发现,符号边控制数较小的图往往具有较小的最小度和较大的最大度(参见文[2]).在固定最大度 Δ 和最小度 δ 的情况下,探讨符号边控制数的下界是非常有意义的,文[2]中获得了

引理1[2]　对任意 n 阶图 G,$m=|E(G)|$,Δ 为 G 的最大度,则 $\gamma'_s(G)\geq m-\frac{\Delta}{2}n$.特殊地,当 G 为正则图时 $\gamma'_s(G)\geq 0$.

本文的主要目的是给出符号边控制数的另一个下界,并推广了关于正则图 G,$\gamma'_s(G)\geq 0$ 的结论.此外,还确定了圈、路及完全图的符号边控制数.

2 主要结果及其证明

定理1　对任意 n 阶连通图 G,若$|E(G)|=m$

收稿日期:2002-12-30

基金项目:江西省自然科学基金项目.

作者简介:徐保根(1963-),男,江西南昌人,华东交通大学教授.

$\geqslant 1$,则

$$\gamma'_s(G) \geqslant \lceil \frac{m-(\Delta-\delta)(\Delta-2)(n-\delta)}{2\Delta-1} \rceil .$$

其中 Δ、δ 分别为图 G 的最大度和最小度.$\lceil x * 4$ 表示不小于 x 的最小整数.

证明:因 G 为连通图且 $m \geqslant 1$,当 $\Delta = 1$ 时,$\delta = 1, m = 1, G = K_2$,定理显然成立,下设 $\Delta \geqslant 2$.

设 f 为图 G 的一个符号边控制函数且使得 $\gamma'_s(G) = \sum_{e\in E(G)} f(e)$ 成立.令

$$E_1 = \{e \in E(G) \mid f(e) = +1\}$$

$$E_2 = \{e \in E(G) \mid f(e) = -1\}$$

显然,$E(G) = E_1 \cup E_2$ 且 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

记 $s = |E_1|, t = |E_2|$,显然有 $m = s + t, \gamma'_s(G) = s - t$.定义 G 的两个子图 G_1 和 G_2 如下:

$$V(G_i) = V(G), \quad E(G_i) = E_i \quad (i = 1,2)$$

对于每一点 $u \in V(G)$,定义 $d^*(u) = d_{G_1}(u) - d_{G_2}(u)$

令 $A = \{u \in V(G) \mid d^*(u) \geqslant 1\}$

$B = \{u \in V(G) \mid d^*(u) \leqslant 0\}$

显然 $V(G) = A \cup B$ 且 $A \cap B = \emptyset$;

由于 $\gamma'_s(G) = s - t = |E(G_1)| - |E(G_2)|$

$$= \frac{1}{2}\sum_{u\in V(G)} d_{G_1}(u) - \frac{1}{2}\sum_{u\in V(G)} d_{G_2}(u) = \frac{1}{2}\sum_{u\in V(G)} d^*(u)$$

从而有 $$\sum_{u\in V(G)} d^*(u) = 2\gamma'_s(G) \quad (1)$$

对于任意一条边 $e = uv \in E(G)$,由符号边控制函数 f 的定义知 $\sum_{e'\in N_G[e]} f(e') \geqslant 1$,即 $d^*(u) + d^*(v) - f(e) \geqslant 1$,从而 $\sum_{uv\in E(G)} (d^*(u) + d^*(v) - f(e)) \geqslant m$.

$$\sum_{uv\in E(G)} [d^*(u) + d^*(v)] - \sum_{e\in E(G)} f(e) \geqslant m.$$

$$\sum_{u\in V(G)} d_G(u) d^*(u) \geqslant m + \sum_{e\in E(G)} f(e) = m + \gamma'_s(G)$$

因为当 $u \in A$ 时,$d^*(u) \geqslant 1, d_G(u) \leqslant \Delta$;

当 $u \in B$ 时,$d^*(u) \leqslant 0, d_G(u) \geqslant \delta$.

因此,$\sum_{u\in V(G)} d_G(u)d^*(u) = \sum_{u\in A} d_G(u)d^*(u) + \sum_{u\in B} d_G(u)d^*(u)$

$$\leqslant \Delta \sum_{u\in A} d^*(u) + \delta \sum_{u\in B} d^*(u) = \Delta \sum_{u\in V(G)} d^*(u) + (\delta - \Delta)\sum_{u\in B} d^*(u)$$

即 $\Delta \sum_{u\in V(G)} d^*(u) + (\delta - \Delta)\sum_{u\in B} d^*(u) \geqslant m + \gamma'_s(G)$

由(1)得到:

$$(2\Delta - 1)\gamma'_s(G) \geqslant m + (\Delta - \delta)\sum_{u\in B} d^*(u) \quad (2)$$

下面证明:

$$\sum_{u\in B} d^*(u) \geqslant -(\Delta - 2)(n - \delta) \quad (3)$$

(3.1) 对任意一点 $u \in B$,均有 $d^*(u) \geqslant -(\Delta - 2)$.

事实上,注意到 $\Delta \geqslant 2$ 且 $|d^*(u)| \leqslant d_G(u) \leqslant \Delta$.

(反证)假设存在 $u \in B$ 使得 $d^*(u) \leqslant -(\Delta - 1)$,即 $d^*(u) = -\Delta$ 或 $-(\Delta - 1)$.

则存在一条边 $uv \in E$ 使得 $f(uv) = -1$,因此,

$d^*(v) = d_{G_1}(v) - d_{G_2}(v) \leqslant (d_G(v) - 1) - 1 \leqslant \Delta - 2$,

由于 f 为 G 的符号边控制函数,由定义知

$$\sum_{e\in N_G[uv]} f(e) = d^*(u) + d^*(v) - f(uv) \geqslant 1,$$

即有 $$d^*(u) + (\Delta - 2) - (-1) \geqslant 1$$

$d^*(u) \geqslant -(\Delta - 2)$ 与假设矛盾

因此,结论(3.1)成立.

(3.2) 若对每一点 $u \in B$,均有 $d^*(u) = 0$,则(3)式显然成立(注意到 $\Delta \geqslant 2$).

(3.3) 若存在 $u_0 \in B$ 使得 $d^*(u_0) \neq 0$,即 $d^*(u_0) \leqslant -1$,则 $N_G(u_0) \cap B = \emptyset$.

(反证)若 $N_G(u_0) \cap B \neq \emptyset$,即存在 $v_0 \in B$,使得 $u_0v_0 = e \in E(G)$

由符号边控制函数 f 的定义知

$$\sum_{e'\in N_G[e]} f(e') = d^*(u_0) + d^*(v_0) - f(u_0v_0) \geqslant 1$$

注意到 $d^*(u_0) \leqslant -1, v_0 \in B$ 知 $d^*(v_0) \leqslant 0$,这导出 $f(u_0v_0) \leqslant -2$.这是不可能的.即结论(3.3)成立.

由结论(3.3)知 $N_G(u_0) \subseteq A$,从而 $|A| \geqslant |N_G(u_0)| \geqslant \delta$.因为 $|A| + |B| = n$,从而有

$|B| \leqslant n - \delta$

结合结论(3.1)我们有(注意 $\Delta \geqslant 2$)

$\sum_{u\in B} d^*(u) \geqslant \sum_{u\in B} [-(\Delta - 2)] = -(\Delta - 2)|B| \geqslant -(\Delta - 2)(n - \delta)$.至此,我们证明了不等式(3).

由(2)和(3)得

$$(2\Delta - 1)\gamma'_s(G) \geqslant m - (\Delta - \delta)(\Delta - 2)(n - \delta)$$

$$\gamma'_s(G) \geqslant \frac{m - (\Delta - \delta)(\Delta - 2)(n - \delta)}{2\Delta - 1}$$

注意到 $\gamma'_s(G)$ 为整数,因此,定理 1 证毕.

由定理 1 可直接得到

推论 1　对任意 n 阶 k – 正则连通图均有

$$\gamma'_s(G) \geq \lceil \frac{m}{2k-1} \rceil = \lceil \frac{kn}{4k-2} \rceil$$

这一推论推广了文[2]中关于正则图的结论(引理1).

对于一般给定的图 G,确定 $\gamma'_s(G)$的确切值往往都是比较困难的.下面我们给出圈、路及完全图的符号边控制数.

定理 2 对任意正整数 $n \geq 3$.均有

1) $\gamma'_s(C_n) = n - 2\left[\frac{n}{3}\right]$ (其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数).

2) $\gamma'_s(P_n) = n + 1 - 2\lceil \frac{n-2}{3} \rceil$.

3) $\gamma'_s(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ \frac{n-1}{2} & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$

证明:1) 对于 C_n 的任何一个符号边控制函数 f,在 f 下,标有 -1 的边至多有$\left[\frac{n}{3}\right]$条(否则存在一条边 e,使得 $N[e]$中有两条 -1 边和一条 $+1$ 边.这与 f 的定义矛盾).标有 $+1$ 的边至少有 $n - \left[\frac{n}{3}\right]$条.从而

$$\gamma'_s(C_n) \geq n - 2\left[\frac{n}{3}\right].$$

反之,记 C_n 的边依次为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$,令

$$f(e_i) = \begin{cases} -1 & i \equiv 0 (\mathrm{mod} 3); \\ +1 & \text{否则;} \end{cases}$$

可见 f 为 C_n 的符号边控制函数,且$\sum_{i=1}^{n} f(e_i) = n - 2\left[\frac{n}{3}\right]$.

因此,$\gamma'_s(C_n) = n - 2\left[\frac{n}{3}\right]$

2) 类似于(1),容易证明.

3) 首先证明:对于 K_n 的任意一个边控制函数 f,均有

$$\sum_{e \in E(K_n)} f(e) \geq \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ \frac{n-1}{2} & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

类似于定理 1 的证明中,定义 E_1、E_2、G_1 和 G_2.以及 $d^*(u) = d_{G_1}(u) - d_{G_2}(u)$对每一点 $u \in V(K_n)$.

(一)当 n 为偶数时;显然 $d^*(u)$为奇数(对任意 $u \in V(K_n)$).

(1.1) 若存在 $u_0 \in V(K_n)$使得 $d^*(u_0) \leq -1$,则存在至少一点 $v_0 \in V(K_n)$使得 $f(u_0v_0) = 1$,由定义知

$$\sum_{e \in N[u_0v_0]} f(e) = d^*(u_0) + d^*(v_0) - f(u_0v_0) \geq 1$$

得知 $d^*(v_0) \geq 2$.

除 u_0 和 v_0 之外,其余任意一点 v,均有 $d^*(v) \geq 1$.

因此$\sum_{e \in E(K_n)} f(e) = \frac{1}{2}\sum_{u \in V(K_n)} d^*(u) \geq \frac{1}{2}(-1 + 2 + (n-2)) = \frac{n-1}{2}$.

注意到 n 为偶数,且$\sum_{e \in E(K_n)} f(e)$为整数.

因此$\sum_{e \in E(K_n)} f(e) \geq \frac{n}{2}$.

(1.2) 若对每一点 $u \in V(K_n)$,均有 $d^*(u) \geq 0$.注意到 $d^*(u)$为奇数,从而 $d^*(u) \geq 1$.

即$\sum_{e \in E(K_n)} f(e) = \frac{1}{2}\sum_{u \in V(K_n)} d^*(u) \geq \frac{n}{2}$.

(二)当 n 为奇数时;$d^*(u)$均为偶数,注意到 $n \geq 3$.

(2.1) 若存在一点 $u_0 \in V(K_n)$使得 $d^*(u_0) \leq -2$,则对每一点 $u \neq u_0$,均有

$$\sum_{e \in N[uu_0]} f(e) = d^*(u) + d^*(u_0) - f(u_0u) \geq 1$$

即 $d^*(u) \geq 1 + f(u_0u) - d^*(u_0) \geq -d^*(u_0)$,

从而 $\sum_{e \in E(K_n)} f(e) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(K_n)} d^*(v) \geq \frac{(n-1)(-d^*(u_0)) + d^*(u_0)}{2}$

$$= -\frac{1}{2}(n-2)d^*(u_0) \geq (n-2) \geq \frac{n-1}{2}$$

(2.2) 若存在一点 $u_0 \in V(K_n)$使得 $d^*(u_0) = 0$.则对任意 $u \neq u_0$,均有

$$\sum_{e \in N[u_0u]} f(e) = d^*(u_0) + d^*(u) - f(u_0u) \geq 1$$

即 $d^*(u) - f(u_0u) \geq 1$

$$\sum_{\substack{u \in V(K_n) \\ u \neq u_0}} [d^*(u) - f(u_0u)] \geq n - 1$$

由于 $d^*(u_0) = 0$ 故$\sum_{\substack{u \in V(K_n) \\ u \neq u_0}} f(u_0u) = 0$.

因此$\sum_{u \in V(K_n)} d^*(u) \geq n - 1$

$$\sum_{e \in E(K_n)} f(e) = \frac{1}{2}\sum_{u \in V(K_n)} d^*(u) \geq \frac{n-1}{2}$$

(2.3) 若对每一个 $u \in V(K_n)$均有 $d^*(u) \geq 2$.

则显然 $\sum_{e\in E(K_n)} f(e) = \frac{1}{2}\sum_{u\in V(K_n)} d^*(u) \geq \frac{n}{2}\cdot 2 = n > \frac{n-1}{2}$.

结合(一)和(二),我们证明了:

$$\gamma'_s(K_n) \geq \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{2} & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

其次证明:存在 K_n 的符号边控制函数 f

使得 $\sum_{e\in E(K_n)} f(e) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ \frac{n-1}{2} & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \end{cases}$

情况 1　当 n 为偶数时;

记 $V(K_n) = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$,定义

$$f(u_iu_j) = \begin{cases} +1 & \text{当 } i+j \text{ 为奇数时;} \\ -1 & \text{当 } i+j \text{ 为偶数时;} \end{cases}$$

情况 2　当 n 为奇数时;

记 $V(K_n) = \left\{u_i \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\right\} \cup \left\{v_i \mid 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\right\} \cup \{w\}$.

定义: $f(e) = \begin{cases} +1 & \text{当 } e = u_iw \text{ 或 } e = u_iv_j \text{ 时;} \\ -1 & \text{当 } e = v_iw \text{ 或 } e = u_iu_j \text{ 或 } e = v_iv_j \text{ 时} (i \neq j); \end{cases}$

$\left(\text{其中 } 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, 1 \leq j \leq \frac{n-1}{2}\right)$.

不难验证:f 为 K_n 的符号边控制函数,且使得

$$\sum_{e\in E(K_n)} f(e) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ \frac{n-1}{2} & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \end{cases}$$

至此,证明了 $\gamma'_s(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数时;} \\ \frac{n-1}{2} & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \end{cases}$

定理 2 证毕.

参考文献

[1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Theory with Applications[M]. Macmillan, London, 1977.

[2] Baogen Xu, On signed edge domination numbers of Graphs [J]. Discrete Math, 2001.

[3] Baogen Xu, E. J. Cockayne, T. W. Haynes, S. T. Hedelniemi, Shangchao zhou, Extremal graphs for inequalities involving domination paramelers[J]. Discrete Math. 216(2000)1 ~ 10.

[4] Zhongfu Zhang, Baogen Xu, Yinzhen Li, Linzhong Liu, A note on the lower bounds of signed domination number of a graph[J]. 195(1999), 295 ~ 298.

[5] J. H. Hallingh, E, Ungerer, The signed and minus k-subdomination numbers of comets[J]. Discrete Math. 183(1998) 141 ~ 152.

[6] Baogen Xu. Shangchao Zhou, Characterization of connected graphs with maximum domination number[J]. 数学研究与评论. 4(2000)523 ~ 528.

On Signed Edge Domination in Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang, 300013, China)

Abstract: Let G be a connected graph of order n, $m = |E(G)|$, Δ and δ are the maximum and minimum degree of G, resp. In this paper the lower bounds of siged edge domination number of G are obtained, that is, $\gamma'_s(G) \geq \left\lceil \frac{m - (\Delta - \delta)(\Delta - 2)(n - \delta)}{2\Delta - 1} \right\rceil$, the signed edge domination numbers for several classes of graphs are determined.

Key words: signed edge domination function; signed edge domination number