文章编号:1005－0523(2006)01－0132－02

奇完全数的欧拉因子

周尚超

(华东交通大学,江西 南昌 330013)

摘要:证明了 1)若 $p^{a+(a+1)k}$是奇完全数m的欧拉因子,$a=2q-1$若$p \bmod q=1$或$q-1$,则m的最小素因子不大于q. 2)设$p \bmod 5=4$且$p \bmod 7!=1$则p^{5+6k}不是奇完全数m的欧拉因子. 3)设$p \bmod 5=1$且$p \bmod 7=6$, $p \bmod 3=2$ 则p^{9+10k}不是奇完全数m的欧拉因子.

关 键 词:奇完全数.素数;积性函数

中图分类号:O157.1 **文献标识码:**A

用$S(m)$表示正整数m的正因子(含1和m)的和. p,q,r,s,t表示素数. 如果$S(m)=2m$,则称m是完全数. 例如6和28都是完全数. 目前已知m是偶完全数的充分必要条件是$m=2^{(p-1)}(2^p-1)$[1],且2^p-1是素数. 至今尚未发现有奇完全数存在. 是否存在奇完全数是数论中的一大难题 Hagis 和 Chein 曾经独立证明:奇完全数至少可以被8个互异素数除尽[2]. 当奇完全数的最小素因子加大时其素因子的个数急剧增加[3]. 奇完全数必有一个大于100110的素因数[1]. 至今已有许多这方面的结果. 如果m与n互素,则$S(m*n)=S(m)S(n)$;即S是一个积性函数. 设$m=p^aq^b\cdots t^e$,. 则$S(p^aq^b\cdots t^e)=S(p^a)S(q^b)*\cdots S(t^e)$. 如果$m=p^aq^b\cdots t^e$,则称$p^a,q^b,\cdots t^e$是$m$的构成元素,简称构成元素. 若干个构成元素之积也称为构成元素.

引理1 设p是素数,$d=S(p^a)/p^a$,则$(p+1)/p<d<p/(p-1)$

证明 $d=(1+p+p^2+\cdots+p^a)/p^a$

$=(1/(p^{a-1})+\cdots+1+p)/p>(1+p)/p$

$1+p+p^2+\cdots+p^a=(p^{a+1}-1)/(p-1)$

$(1+p+p^2+\cdots+p^a)/p^a=(p^{a+1}-1)/((p-1)p^a)$

$=(p-1/p^a)/(p-1)<p/(p-1)$

引理2 设$m=p^aq^b\cdots t^e$, $d=S(m)/m$则

$d<(p/(p-1))(q/(q-1))\cdots(t/(t-1))$

引理3 若p,q是素数$d=S(p^a)/p^a$, $e=S(q^n)/q^n$, $p<q$则$d>e$

引理4 若$a>b$则$S(p^a)/p^a>S(p^b)/p^b$

引理5 若n整除m,则$S(m)/m>S(n)/n$

证明 设$m=p^aq^b\cdots t^e$,则$n=p^Aq^B\cdots t^E$ 其中$A<a, B<b, \cdots, E<e$

$S(m)/m=S(p^a)/p^a\,S(q^b)/q^b\cdots S(t^e)/t^e$

$S(n)/n=S(p^A)/p^A\,S(q^B)/q^B\cdots S(t^E)/t^E$

$S(p^a)/p^a>S(p^A)/p^A, S(q^b)/q^b\cdots S(t^e)/t^e>S(t^E)/t^E$

$S(m)/m>S(n)/n$

引理6 若$m=p^aq^b\cdots t^e$是奇完全数,则m的任何一个构成元素q^b有

$S(q^b)$的奇数素因子也是m的素因子

引理7 $S(p^a)$整除$S(p^{a+(a+1)k})$

证明 $S(p^a)=(1+p+\cdots+p^a)$

$S(p^{a+(a+1)k})=(1+p+\cdots+p^a)(1+p^b+p^{2b}+\cdots+p^{kb})$

收稿日期:2005－11－20

基金项目:江西省自然科学基金项目(511016)

作者简介:周尚超(1948－),男,云南蒙自人,教授.

定理 1[1] 设 $m=p^{a}q^{b}\cdots t^{e}$ 是奇完全数,则 a,b,…,e 中有且仅有一个是奇数,且当 b 为奇数时 $b\equiv1 \pmod 4$,$q\equiv1 \pmod 4$)

定义 设 $m=p^{a}q^{b}\cdots t^{e}$ 是奇完全数,且 a 奇数,则称 p^{a} 为欧拉因子

定理 2 若 $p^{a+(a+1)k}$是奇完全数 m 的欧拉因子,$a=2q-1$ 若 $p \bmod q=1$ 或 $q-1$,则 m 的最小素因子$<q$

证明 设 $b=a+1$,则 $s(p^{a+(a+1)k})=(1+p+p^{2}+\ldots+p^{a})(1+p^{b}+p^{2b}+\ldots+p^{kb})=(1+p)(1+p^{2}+p^{4}+\ldots+p^{q-1})(1+p^{b}+p^{2b}+\ldots+p^{kb})$

若 $p \bmod q=1$ 则$(1+p^{2}+p^{4}+\ldots+p^{q-1})$是 q 的倍数,若 $p \bmod q=q-1$ 则$(1+p)$是 q 的倍数.

系 1 设 $n=p^{5+12k}$是奇完全数 m 的欧拉因子,则 3 是 m 的最小素因子

定理 3 1) $n=3^{a}5^{b}7^{c}$ 不是构成元素.

2) $n=3^{a}5^{b}11^{c}t^{e}$ 不是构成元素,这里 $t=13$,17,19.

3) 若 $n=3^{a}5^{b}11^{c}$ 是奇完全数 m 的构成元素,则 $a>2$ 且 $b=1$.

证明 1)设 n 是奇完全数 m 的构成元素,则 n 整除 m.由定理 1,a,c 必为偶数因此 $S(m)/m>S(n)/n>S(3^{2}*5*7^{2})/3^{2}*5*7^{2}=13*6*57/(9*5*49)=4446/2205>2$

同理可证 2),3)

系 2 设 m 是奇完全数,则 m 不能被 3,5,7 同时整除.

定理 4 1)设 $p \bmod 5=4$ 且 $p \bmod 7!\ =1$ 则 p^{5+6k}不是奇完全数 m 的欧拉因子.

2) $p \bmod 5=1$ 且 $p \bmod 7=6$ $p \bmod 3=2$ 则 p^{9+10k}不是奇完全数 m 的欧拉因子..

3) 5^{5+6k}不是奇完全数 m 的欧拉因子.

4) $59+10k$ 不是奇完全数 m 的欧拉因子.

5) 17^{5+6k}不是奇完全数 m 的欧拉因子.

证明 1) 设 p^{5+6k}是 m 的构成元素. $S(p^{5})=(1+p)(1+p2+p4)$. $(1+p)$是 5 的倍数.若 $p \bmod 3=1$,则 $1+p2+p4$ 是 3 的倍数,若 $p \bmod 3=2$,则 $1+p$ 是 3 的倍数若 $p \bmod >1$,则$(1+p)(1+p2+p4)$是 7 的倍数 因此 m 被 3,5,7 同时整除,由系 1 m 不是奇完全数,因此 p^{5+6k}不是奇完全数 m 的欧拉因子.

2) 设 p^{9+10k}是 m 的构成元素. $S(p^{9})=(1+p)(1+p^{2}+p^{4}+p^{6}+p^{8})$. $(1+p)$是 3 和 6 的倍数,$(1+p^{2}+p^{4}+p^{6}+p^{8})$是 5 的倍数,因此 m 被 3,5,7 同时整除,p^{9+10k}不是奇完全数 m 的欧拉因子

3) $S(5^{5})=2^{*}\ 3^{2}*7*31=3906$.由引理 6 3,7 以及 5 都是 m 的素因子,5^{5+6k}不是奇完全数 m 的欧拉因子

4) $S(5^{9})=2441406=2*3*11*71*521$.若 5^{9} 是奇完全数 m 的构成元素,则 $n=3^{a}5^{b}11^{c}$ 是奇完全数 m 的构成元素,根据定理 3,这是不可能的.

5) $S(17^{5})=2*3^{3}*7*13\ *307$.令 $n=3^{3}*7^{2}*13^{2}*17^{5}*307^{2}$ 则 $S(n)/n>2$

参考文献:

[1] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1979

[2] Hagis P.Every odd perfect number has at least 8 prime factors [J].Notices Amer Math Soc.1975(22):60

[3] 周尚超.奇完全数的几个定理[J].华东交通大学学报,2005(5):133-134.

Euler Factor of Odd Perfect Number

ZHOU Shang-chao

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let m=p^{a}n.is odd. Perfect Number gcd(p,n)=1 then p^{a} is Euler Factor of odd perfect number m The following results have been proved: 1)Suppose p mod 5=4 and p mod 7! =1 , a=5+6k then p^{a} is not Euler factor 2) Suppose p mod 5=1 and p mod 7=6 , p mod 3=2, a=9+10k then p^{a} is not Euler factor

Key words: Odd perfect Number; prime Nubber; multiplicative function