文章编号：1005－0523(2006)01－0134－03

关于连通图的IC－着色

徐保根

（华东交通大学 基础科学学院，江西 南昌 330013）

摘要：文[2]中引入了图的IC－着色和IC－指数概念，本文考虑了两个图的和图IC－指数，证明了：对任意连通图 G 和 H，均有 $M(G+H)\geq(M(G)+1)(M(H)+1)-1$，并给出了星的任意细分图IC－指数的一个下界，推广了文[2]中的两个结果．

关　键　词：IC－着色；IC－指数；连通图；和图

中图分类号：O157.5　　　　**文献标识码：**A

本文所指的图均为无向简单图，文中未说明的符号和术语同于文献[1]．

设 G 和 H 为两个图，则 $G+H$ 表示 G 与 H 的和图，即在 $G\cup H$ 中将图 G 的每个顶点与 H 的每个顶点邻接而成的图．

定义1[2]　设 $G=(V,E)$ 一个图，对于图 G 的一个着色 $f:V(G)\rightarrow N$(正整数集)和 G 的一个子图 H，则记 $f(H)=\sum_{v\in V(H)}f(v)$．如果对于每一个整数 $k\in\{1,2,3,\cdots,f(G)\}$，存在 G 的一个连通子图 H 使得 $f(H)=k$，则称 f 为图 G 的一个IC－着色．图 G 的IC－指数定义为

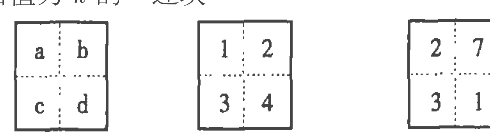
$$M(G)=\max\{f(G)\mid f\text{ 为图 }G\text{ 的一个 }IC\text{－着色}\}$$

并且称适合 $f(G)=M(G)$ 的IC－着色 f 为图 G 的一个极大IC－着色．

由定义易见，一个图 G 存在IC－着色当且仅当 G 为连通图．

E.Salehi等人[2]引入的图的IC－着色概念也有许多实际背景．我们举一个非常简单的例子：

例　将一张邮票分成四块(如图(1)所示)，每块均安排一定的面值(正整数)，如何安排每块的面值才是最优的呢？一方面我们希望整张邮票的总面值 M 尽可能大，同时为了使用方便，要求对于从1到 M 之间的每一个正整数 k，能从这张邮票中撕下面值为 k 的一连块．



图(1)　示意图　图(2)　IC－着色　图(3)　极大IC－着色

每块邮票可对应一个点，相邻的两块邮票对应的点相邻接，整张邮票对应图 C_4，不难验证：$M(C_4)=13$，从而图3所给出的安排每块邮票面值是最优的．

一般地说，确定一个图的IC－指数是困难的，文[2]中确定了完全图和星的IC－指数，并对一些特殊图的IC－指数进行了估界，如路、双星、圈、轮图等，并提出了一些相关问题．如：

引理2[2]　对于任意连通图 G，若 $v\notin V(G)$，则 $M(G+v)\geq 2M(G)+1$．

设有 n 条路 P_{b_1}、P_{b_2}、……、P_{b_n}，各取一个端点粘合在一起所得的图记为 $ST(n;b_1,b_2,\cdots,b_n)$，称为星的细分图．特殊地，若这 n 条路均为 P_b，则简记为 $ST(n;b^n)$．

引理3[2]　设整数 $n\geq 3$，则 $M(ST(n;3^n))\geq 3^n+3$．

收稿日期：2005－10－21

基金项目：江西省自然科学基金0311047

作者简介：徐保根(1963－)，男，江西南昌人，教授．

为了推广这两个结果,本文将给出两个图的直和图 IC—指数的一个下界,推广引理2.并考虑星的任意细分图的 IC—指数,给出 $ST(n;b_1,b_2,\cdots,b_n)$ IC—指数的下界,从而推广引理3.

定理4　对任意连通图 G 和 H,均有

$M(G+H)\geq(M(G)+1)(M(H)+1)-1$

证明　设 f_1 和 f_2 分别为图 G 和 H 的极大 IC—着色,即有 $f_1(G)=M(G)$ 且 $f_2(H)=M(H)$,定义 $G+H$ 的一个着色如下:

$$f(v)=\begin{cases} f_1(v) & \text{当 } v\in V(G)\text{时} \\ (M(G)+1)f_2(v) & \text{当 } v\in V(G)\text{时}\end{cases}$$

不难计算:$f(G+H)=f(G)+f(H)=f_1(G)+f_2(H)=M(G)+(M(G)+1)M(H)=(M(G)+1)(M(H)+1)-1$.

下面只需验证 f 是图 $G+H$ 的一个 IC—着色即可.

记 $M=(M(G)+1)(M(H)+1)-1$,对于每一个整数 $k\in\{1,2,\cdots,M\}$,可设

$k=(M(G)+1)s+t$,其中整数 s 和 t 适合:$0\leq s\leq M(H)$,$1\leq t\leq M(G)$,.

情况1　当 $s=0$ 时;此时 $1\leq k=t\leq M(G)$,由于 f_1 为图 G 的一个极大 IC—着色,故存在图 G 的一个连通子图 G_1 使得 $f_1(G_1)=k$,当然 G_1 也是 $G+H$ 的连通子图.由 f 的定义不难看出:$f(G_1)=f_1(G_1)=k$.令:$G'=G_1$,即有 $f(G')=k$.

情况2　当 $s\geq1$ 时;此时 $1\leq s\leq M(H)$,由于 f_2 为图 H 的一个极大 IC—着色,故存在图 H 的一个连通子图 H_1 使得 $f_2(H_1)=s$.又因为 $1\leq t\leq M(G)$ 且 f_1 萎图 G 的一个极大 IC—着色,故存在图 G 的一个连通子图 G_1 使得 $f_1(G_1)=t$.令:$G'=G_1+H_1$,显然 G' 为 $G+H$ 的一个连通子图,并且有

$f(G')=f(G_1)+f(H_1)=f_1(G_1)+(M(G)+1)f_2(H_1)=t+(M(G)+1)s=k$.

综合上述情况1~2,对于每一个整数 $k\in\{1,2,\cdots,M\}$,$G+H$ 中有一个连通子图 G' 使得 $f(G')=k$,因此 f 是图 $G+H$ 的一个 IC—着色.定理4证毕 ♯.

特殊地,当 $H=K_1=\{v\}$ 为一个孤立点时,由定理4即得引理2,因此定理4是引理2的一个推广.

引理5　设整数 $b_1\geq b_2\geq b_3\geq\cdots\geq b_n\geq2$,$T=\sum_{i=0}^{n-1}(b_{i+1}-1)b_n^i$,则对于任意整数 $k\in\{1,2,\cdots,T\}$,存在 n 个非负整数 $a_i(0\leq i\leq n-1)$,使得

$k=a_0+a_1b_n+a_2b_n^2+a_3b_n^3+\cdots+a_{n-1}b_n^{n-1}$,

且 $0\leq a_i\leq b_{i+1}-1(0\leq i\leq n-1)$　(1)

证明:对 k 用归纳法,当 $1\leq k\leq b_1-1$ 时;取 $a_0=k$,并且 $a_i=0(i=1,2,\cdots,n-1)$,命题显然成立.若每个小于 $k(T\geq k\geq2)$ 的正整数均可由(1)右边的形式表示,则存在整数 $c_i(0\leq i\leq n-1)$ 使得 $k-1=c_0+c_1b_n+c_2b_n^2+c_3b_n^3+\cdots+c_{n-1}b_n^{n-1}$　(2)

其中 $0\leq c_i\leq b_{i+1}-1(0\leq i\leq n-1)$.

(反正法)假若不能由(1)右边的形式表示,下面证明:

$c_i=b_{i+1}-1(0\leq i\leq n-1)$.显然 $c_0=b_1-1$,$c_1=b_2-1$(否则,$c_1\leq b_2-2$,由于 $c_0-b_1+1=0$,故 $k=0+(c_1+1)b_n+c_2b_n^2+c_3b_n^3+\cdots+c_{n-1}b_n^{n-1}$ 为(1)右边的形式,矛盾).若 $c_i=b_{i+1}-1(0\leq i\leq s-1)$,但 $c_s\neq b_{s+1}-2$,即,由(2)知:

$k=1+(b_1-1)+(b_2-1)b_n+(b_3-1)b_n^2+\cdots+(b_s-1)b_n^{s-1}+c_sb_n^s+\cdots+c_{n-1}b_n^{n-1}$,并注意到 $0=1+(b_n-1)+(b_n-1)b_n+(b_n-1)b_n^2+\cdots+(b_n-1)b_n^{s-1}-b_n^s$,两式相减得:

$k=(b_1-b_n)+(b_n-b_n)b_n+(b_3-b_n)b_n^2+\cdots+(b_s-b_n)b_n^{s-1}+(c_s+1)b_n^s+\cdots+c_{n-1}b_n^{n-1}$,这与假设矛盾.因此 k 能由(1)右边的形式表示.由归纳原理,引理5证毕.　♯

定理6　设 $n(n\geq2)$ 个整数 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 适合 $b_1\geq b_2\geq b_3\geq\cdots\geq b_n\geq2$,则有

$$M(ST(n;b_1,b_2,\cdots,b_n))\geq 2b_1+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-1)b_n^i$$

证明　记 $G=ST(n;b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 由于 G 是由 n 条路 P_{b_1}、P_{b_2}、……、P_{b_n},各取一个端点粘合在一起所得的图,这个公共端点记为 v_0,并且第 j 条路 P_{b_j} 的顶点集记为 $\{v_0\}\cup A_j$,且 $v_0\notin A_j$,$|A_j|=b_j-1$,$j=1,2,\cdots,n$.定义图 G 的一个着色 f 如下:

$$f(v)=\begin{cases} b_1+1 & \text{当 } v=v_0\text{ 时} \\ b_n^{j-1} & \text{当 } v\in A_j\text{ 时}\end{cases}$$ 这里 $j=1,2,\cdots,n$.

不难计算:$f(G)=(b_1+1)+\sum_{j=1}^{n}b_n^{j-1}|A_j|=b_1+1+\sum_{j=1}^{n}b_n^{j-1}(b_j-1)=2b_1+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-1)b_n^i$.

下面只需验证 f 是图 G 的一个 IC—着色即可.

令:$M=2b_1+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-1)b_n^i$,对于每一个整数 $k\in\{1,2,3,\cdots,M\}$,我们只需找出 G 的一个连通子图 G' 使得 $f(G')=k$ 即可.

情况1 当 $1\le k\le b_1+1$ 时；

若 $1\le k\le b_1-1$，则在 $P_{b_1}-v_0$ 上取一条 k 阶路记为 G'，显然 $f(G')=k$. 若 $k=b_1$，则取 $G'=K_1=\{u\}$，$u\in A_2$；若 $k=b_1+1$，则取 $G'=K_1=\{v_0\}$，显然 $f(G')=k$.

情况2 当 $b_1+2\le k\le M$ 时；

由于 $1k-(b_1+1)\le M-(b_1+1)=(b_1-1)+\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1}-1)b_n^i=\sum_{i=0}^{n-1}(b_{i+1}-1)b_n^i$，注意到 $b_1\ge b_2\ge b_3\ge\cdots b_n\ge 2$，由引理5知：存在非负整数列 $a_i(0\le i\le n-1)$，使得 $k-(b_1+1)=a_0+a_1b_n+a_2b_n^2+a_3b_n^3+\cdots+a_{n-1}b_n^{n-1}$，且 $0\le a_i\le b_{i+1}-1(0\le i\le n-1)$.

对于每一个 $j=1,2,\cdots,n$，由于 $|A_j|=b_j-1\ge a_{j-1}$，故可在 A_j 中取出 a_{j-1} 个点，构成集合 $B_j\subseteq A_j$，$|B_j|=a_{j-1}$，使得 $B_j\cup\{v_0\}$ 在 G 中的导出子图为一条 $a_{j-1}+1$ 阶路.

令：$S=\{v_0\}\cup B_1\cup B_2\cup\cdots\cdots\cup B_n$，$G'=G[S]$ 表示S在G中的导出子图，可见 G' 是具有一个公共端点 v_0 的一些路组成的图（星的细分图），显然 G' 为 G 的连通子图，并且有

$$f(G')=f(v_0)+\sum_{i=1}^{n}b_n^{i-1}|B_i|=(b_1+1)+\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}b_n^{i-1}=k$$

综合上述情况1～2，对于每一个整数 $k\in\{1,2,\cdots,M\}$，G 中有一个连通子图 G' 使得 $f(G')=k$，因此 f 是图 G 的一个 IC－着色. 定理6证毕.

♯

特殊地，若 $b_1=b_2=\cdots=b_n=b\ge 2$，则 $ST(n;b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 简记为 $ST(n;b^n)$，由定理6直接得到

推论7 设整数 $n\ge 2$ 且 $b\ge 2$，则有 $M(ST(n;b^n))\ge b^n+b$.

特殊地，当 $b=3$ 时，即得到引理3. 因此，定理6及推论7是引理3的重要推广. 顺便指出，当 $b=2$ 时，$ST(n;b^n)=ST(n)$ 为 $n+1$ 阶星，文[2]中证明了其IC－指数为 2^n+2，由此可见，定理6及推论7所给出的下界是可达到的.

一般地说，确定一个连通图的 IC－指数是困难的，到目前为止，除了星和完全图的 IC 指数被确定外，没有其它图类的 IC－指数是是已知的，因此给出 IC－指数好的界限是有意义的，最后，我们提出如下：

问题8 如何确定路 P_n、圈 C_n、轮 W_n 和完全二部 $K_{m,n}$ 图的 IC－指数?

参考文献：

[1] J. A. Bondy, V. S. R. Murty, Graph Theory with Applications[M]. Elsevier, Amsterdam, 1976.

[2] E. Salehi, S. Lee and M. Khatirinejad, IC－Colorings and IC－Indices of Graphs[J]. Discrete Mathematics, 299(2005), 297～310.

[3] J. A. Gallian, A survey: recent results, conjectures and open problems in labeling graphs[J]. J. Graph Theory, 13(1989) 29～37.

On IC-colorings of Connected Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The concept of IC-colorings and IC-indices of graphs was introduced in [2]. In this paper we consider the IC-indices in the sum graph of two graphs, show that $M(G+H)\ge(M(G)+1)(M(H)+1)-1$ holds for any two connected graphs G and H, and give a lower bound of the IC-indices for any subdivision of stars, which generalize some results in [2].

Key words: IC-coloring; IC-index; connected graph; sum graph.