文章编号:1005－0523(2006)01－0139－03

一些图 $C_{4k}\cup P_n$ 的优美性

宋庆华

(华东交通大学 基础科学学院，江西 南昌 330013)

摘要:证明了 $C_{4k}\cup P_n$ 当 $n=k+2,2k+1,2k+2,2k+3,3k,3k+1$ 时的优美性.

关　键　词:圈;路;优美性;标号

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A

优美图的研究已经取得了很多成果.自从1975年A.Kotzig首先考虑了两个图之并，即不连通图的优美性之后，人们在这方面做了大量的工作，主要研究了路与路之并，路与圈之并，圈与圈之并，星与星之并等的优美性问题.图 $C_m\cup P_n$ 是 C_m 与 P_n 的不交并，1985年，Frucht 和 Salinas 猜想:$C_m\cup P_n$ 优美的充要条件是 $m+n\geq 7$.关于 $C_m\cup P_n$ 的优美性，已知的主要结果有:$C_{2x+1}\cup P_x$，$x\geq 2$ 是优美的;$C_{2x+1}\cup P_{x-2t}$，$1\leq t\leq\lfloor(x-2)/2\rfloor$ 是优美的;$C_{2x+1}\cup P_{x+m}$，$m\geq 1$，$x\geq 2$ 是优美的;$C_3\cup P_n$，$C_4\cup P_n$，$C_5\cup P_n$ 的优美性也已解决.此问题的彻底解决将是有意义的.

本文研究了 $C_{4k}\cup P_n$ 的优美性，证明了 $n=k+2,2k+1,2k+2,2k+3,3k,3k+1$ 时，它是优美的.

1　基本概念和引理

人们已经证明了路的优美性，在本文中，我们将要用到弱优美路的概念，它是优美路概念的推广.下面首先给出它的定义.

定义(弱优美路)[1]　设有 n 元非负整数集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 以及 $n-1$ 元自然数集 $B=\{y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}\}$.设有 n 个顶点的路 P_n，它的 n 个顶点依次记为 u_i，$i=1,2,\cdots,n$，做集 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 到集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的双射 θ，记 u_i 的象为 $\theta(u_i)\in A$，称 $\theta(u_i)$ 为顶点 u_i 的标号.于是产生 P_n 的边 u_iu_{i+1} 的标号 $\theta'(u_iu_{i+1})=|\theta(u_i)-\theta(u_{i+1})|$.若集 $\{\theta'(u_1u_2),\theta'(u_2u_3),\cdots,\theta'(u_{n-1}u_n)\}=B$，即 P_n 的 $n-1$ 条边集到集 $B=\{y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}\}$ 的映射 θ' 也双射，则称带有顶点标号的路 P_n 为以 A 为顶点标号集，以 B 为边标号集的弱优美路，称 θ 为弱优美标号.

引理1[1]　设有非负整数集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 及自然数集 $B=\{\}_1,y_2,\cdots,y_{n-1}\}$，并且存在以 A 为顶点标号集，以为 B 边标号集的弱优美路 P_n，那么

1) 设 s 是自然数，令 $A_1=\{x_1+s,x_2+s,\cdots,x_n+s\}$，则存在以 A_1 为顶点标号集，以 B 为边标号集的弱优美路 P_n';

2) 设 s 是自然数，且使 $A_2=\{s-x_1,s-x_2,\cdots,s-x_n\}$ 仍为非负整数集，则存在以 A_2 为顶点标号集，以 B 为边标号集的弱优美路 P_n';

引理2[1]　当 $s>2$ 时，设有非负整数集 $A=\{0,2,3,\cdots,s\}$，自然数集 $B=\{1,2,\cdots,s-1\}$，则存在以 A 为顶点标号集，B 为边标号集的弱优美路 P_s，且使其左端点的标号为0.

收稿日期:2005－07－20

作者简介:宋庆华(1976－)，女，山东成武人，讲师，主要研究方向为图论和组合优化.

证明:用数学归纳法.当 $s=3,4,5$ 时,弱优美路 P_3,P_4,P_5 各顶点具体的标号为:P_3:0,2,3; P_4:0,3,4,2; P_5:0,4,3,5,2,所以结论正确.假定比 s 小的所有大于 2 的正整数结论都正确.

当 s 时($s>5$).先给出 4 个点的路 P_4 的弱优美标号为 P_4:0, $s-1$,2, s,且其右端点标号为 s,由归纳法假定知,存在以 $A=\{0,2,3,\cdots,s-3\}$ 为顶点标号集,以 $B=\{1,2,\cdots,s-4\}$ 为边标号集的弱优美路 P_{s-3},且使其左端点的标号为 0,将此弱优美路的每个顶点标号用 s 去减,由引理知,得到以 $A_1=\{3,4,\cdots,s-2,s\}$ 为顶点标号集,以 $B=\{1,2,\cdots,s-4\}$ 为边标号集的弱优美路 P'_{s-3},且其左端点的标号为 s.将两条弱优美路 P_4 与 P'_{s-3} 在标号 s 的顶点处连接,于是得到一条以 $\{0,2,s-1,s\}\cup\{3,4,\cdots,s-2,s\}=\{0,2,3,\cdots,s\}$ 为顶点标号集,以 $\{s-3,s-2,s-1\}\cup\{1,2,\cdots,s-4\}=\{1,2,\cdots,s-1\}$ 为边标号集的弱优美路 P_s,且其左端点的标号为 0.因此 s 时的结论正确.引理 2 得证.

2 主要结论

在以下的定理中,我们都假设 C_{4k} 的顶点依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_{4k}$, P_n 的顶点依次为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,.下面给出本文的主要结论.

定理 1 $C_{4k}\cup P_{k+2}$ 是优美图,其中 k 为自然数.

证明 定义 $C_{4k}\cup P_{k+2}$ 顶点集上函数 θ 如下:

$$\theta(x_i)=\begin{cases}(i-1)/2 & i=1,3,\cdots,2k-1;\\ 1+(i-1)/2, & i=2k+1,2k+3,\cdots,4k-1;\\ 5k+2-i/2, & i=2,4,\cdots,4k;\end{cases}$$

当 k 为偶数时,定义

$$\theta(y_i)=\begin{cases}k, & i=1;\\ 3k+2-(i-1)/2, & i=3,5,\cdots,k+1;\\ 2k+i/2, & i=2,4,\cdots,k+2;\end{cases}$$

当 k 为奇数时,定义

$$\theta(y_i)=\begin{cases}k, & i=1;\\ 3k+2-(i-1)/2, & i=3,5,\cdots,k+2;\\ 2k+i/2, & i=2,4,\cdots,k+1;\end{cases}$$

由定义,θ 在 C_{4k} 顶点集上函数值的集合为:

$\{0,1,\cdots,k-1\}\cup\{k+1,k+2,\cdots,2k\}\cup\{3k+2,\cdots,5k,5k+1\}$,

θ 在 P_{k+2} 顶点集上函数值的集合,当 k 为偶数时为:

$\{k\}\cup\{5k/2+2,\cdots,3k,3k+1\}\cup\{2k+1,2k+2,\cdots,(5k+1)/2\}$,

当 k 为奇数时为

$\{k\}\cup\{(5k+3)/2,\cdots,3k,3k+1\}\cup\{2k+1,2k+2,\cdots,(5k+1)/2\}$,

由 θ 函数值的集合,很容易求出它在 C_{4k} 边上的诱导值集合为:$\{k+2,\cdots,5k+1\}$,在 P_{k+2} 边上的诱导值集合为:$\{1,2,\cdots,k+1\}$.

由上面 θ 值的集合及诱导值的集合,可以推得下面结论:

(1)显然有 $0\le\theta\le 5k+1$,其中 $5k+1$ 为 $C_{4k}\cup P_{k+2}$ 的边数;

(2) θ 在 C_{4k}, P_{k+2},各自顶点集上的标号没有相同的,它们之间的顶点标号也没有相同的,即 $C_{4k}\cup P_{k+2}$ 的顶点标号满足 $u\neq v$ 时,$\theta(u)\neq\theta(v)$;

(3) θ 使 $C_{4k}\cup P_{k+2}$ 边上的诱导值互不相同.

由以上(1),(2),(3)三点可知,θ 是优美标号,则在此标号下,$C_{4k}\cup P_{k+2}$ 是优美图.

定理 2 $C_{4k}\cup P_{2k+1}$ 是优美图,其中 k 为自然数.

证明 定义 $C_{4k}\cup P_{2k+1}$ 顶点集上函数 θ 如下

$$\theta(x_i)=\begin{cases}(i-1)/2 & i=1,3,\cdots,2k-1;\\ 1+(i-1)/2, & i=2k+1,2k+3,\cdots,4k-1;\\ 6k+1-i/2, & i=2,4,\cdots,4k;\end{cases}$$

$$\theta(y_i)=\begin{cases}k, & i=1;\\ 3k+1+(i-3)/2, & i=3,5,\cdots,2k+1;\\ 3k-(i-2)/2, & i=2,4,\cdots,2k;\end{cases}$$

下面我们只给出 θ 在 $C_{4k}\cup P_{2k+1}$ 顶点集上的函数值集合以及边上的诱导值集合,其余证明过程与定理 1 的证明类似,在此从略.以下各定理的证明也一样.

由定义,θ 在 C_{4k} 顶点集上函数值的集合为

$\{0,1,\cdots,k-1\}\cup\{k+1,k+2,\cdots,2k\}\cup\{4k+1,\cdots,6k-1,6k\}$,

θ 在 P_{2k+1} 顶点集上函数值的集合为:

$\{k\}\cup\{3k+1,3k+2,\cdots,4k\}\cup\{2k+1,\cdots,3k-1,3k\}$,

由 θ 函数值的集合,求得它在 C_{4k} 边上的诱导值集合为:$\{2k+1,\cdots,6k\}$,在 P_{2k+1} 边上的诱导值集合为 $\{1,2,\cdots,2k\}$ 易见 θ 标号是优美的,则在此标号下,$C_{4k}\cup P_{2k+1}$ 是优美图.

定理 3 $C_{4k}\cup P_{2k+2}$ 是优美图,其中 k 为自然数.

证明　定义 $C_{4k}\cup P_{2k+2}$顶点集上函数 θ 如下:

$$\theta(x_i)=\begin{cases}(i-1)/2, & i=1,3,\cdots,2k-1;\\ 1+(i-1)/2, & i=2k+1,2k+3,\cdots,4k-1;\\ 6k+2-i/2, & i=2,4,\cdots,4k;\end{cases}$$

当 $k\equiv 0,3(\mathrm{mod}4)$时,定义

$$\theta(y_i)=\begin{cases}k, & i=1;\\ 3k+1-(i-1)/2, & i=3,5,\cdots,2k+1;\\ 3k+i/2, & i=2,4,\cdots,2k+2;\end{cases}$$

当 $k\equiv 1,2(\mathrm{mod}4)$时,定义

$$\theta(y_i)=\begin{cases}k, & i=1;\\ 3k+1+(i-1)/2, & i=3,5,\cdots,2k+1;\\ 3k+2-i/2, & i=2,4,\cdots,2k+2;\end{cases}$$

由定义,θ在C_{4k}顶点集上函数值的集合为

$\{0,1,\cdots,k-1\}\cup\{k+1,k+2,\cdots,2k\}\cup\{4k+2,\cdots,6k,6k+1\}$,

θ在P_{2k+2}顶点集上函数值的集合,当 $k\equiv 0,3(\mathrm{mod}4)$时为

$\{k\}\cup\{2k+1,\cdots,3k-1,3k\}\cup\{3k+1,3k+2,\cdots,4k+1\}$,

当 $k\equiv 1,2(\mathrm{mod}4)$时为

$\{k\}\cup\{3k+2,3k+3,\cdots,4k+1\}\cup\{2k+1,\cdots,3k,3k+1\}$,

由θ函数值的集合,求得它在C_{4k}边上的诱导值集合为:$\{2k+2,\cdots,6k+1\}$,在P_{2k+2}边上的诱导值集合为$\{1,2,\cdots,2k+1\}$则在此标号下,$C_{4k}\cup P_{2k+2}$是优美图.

定理4　$C_{4k}\cup P_{2k+3}$是优美图,其中 k 为自然数.

证明　定义 $C_{4k}\cup P_{2k+3}$顶点集上函数 θ 如下

$$\theta(x_i)=\begin{cases}(i-1)/2, & i=1,3,\cdots,2k-1;\\ 1+(i-1)/2, & i=2k+1,2k+3,\cdots,4k-1;\\ 6k+3-i/2, & i=2,4,\cdots,4k;\end{cases}$$

$$\theta(y_i)=\begin{cases}k, & i=1;\\ 3k+1-(i-3)/2, & i=3,5,\cdots,2k+3;\\ 3k+2+(i-2)/2, & i=2,4,\cdots,2k+2;\end{cases}$$

由定义,θ在C_{4k}顶点集上函数值的集合为

$\{0,1,\cdots,k-1\}\cup\{k+1,k+2,\cdots,2k\},\cup\{4k+3,\cdots,6k+1,6k+2\}$,$\theta$在$P_{2k+3}$顶点集上函数值的集合为

$\{k\}\cup\{3k+2,3k+3,\cdots,4k+2\}\cup\{2k+1,\cdots,3k,3k+1\}$,

由θ函数值的集合,求得它在C_{4k}边上的诱导值集合为:$\{2k+3,\cdots,6k+2\}$,在P_{2k+3}边上的诱导值集合为:$\{1,2,\cdots,2k+2\}$.显然θ是优美标号,则在此标号下,$C_{4k}\cup P_{2k+3}$是优美图.

定理5　$C_{4k}\cup P_{3k}$是优美图,其中 k 为自然数.

证明　定义 C_{4k}顶点集上函数θ如下

$$\theta(x_i)=\begin{cases}(i-1)/2 & i=1,3,\cdots,2k-1;\\ 1+(i-1)/2, & i=2k+1,2k+3,\cdots,4k-1;\\ 7k-i/2, & i=2,4,\cdots,4k;\end{cases}$$

先给路 P_{2k+1}标号如下

$$\theta(y_i)=\begin{cases}k, & i=2;\\ 4k-1, & i=2;\\ 5k-(i-1)/2, & i=3,5,\cdots,2k+1;\\ 2k-1+i/2, & i=4,6,\cdots,2k;\end{cases}$$

则第$2k+1$个顶点的标号为$4k$.由引理2,存在以$\{0,2,3,\cdots,k\}$为顶点标号集,以$\{1,2,\cdots,k-1\}$为边标号集的弱优美路 P_k,且其左端点的标号为0,其中 $k>2$.再由引理1,把$\{0,2,3,\cdots,k\}$中的值分别用$4k$去减,就得到以$\{4k,3k,3k+1,\cdots,4k-2\}$为顶点标号集,以$\{1,2,\cdots,k-1\}$为边标号集的弱优美路 P_k',且其左端点的标号为$4k$,把路 P_{2k+1}与P_k'在标号为$4k$的顶点处连接,就得到路 P_{3k}的弱优美标号.

由定义,θ在C_{4k}顶点集上函数值的集合为:

$\{0,1,\cdots,k-1\}\cup\{k+1,k+2,\cdots,2k\}\cup\{5k,\cdots,7k-2,7k-1\}$,

路 P_{3k}标号值的集合为

$\{k\}\cup\{4k-1\}\cup\{4k,\cdots,5k-1\}\cup\{2k+1,\cdots,3k-1\}\cup\{3k,\cdots,4k-2\}$,

由θ函数值的集合,则它在C_{4k}边上的诱导值集合为:$\{3k,\cdots,7k-1\}$,在P_{3k}边上的诱导值集合为:$\{3k-1\}\cup\{k\}\cup\{k+1,\cdots,3k-2\}\cup\{1,2,\cdots,k-1\}$.综上所述,显然 $C_{4k}\cup P_{3k}$是优美的.

定理6　$C_{4k}\cup P_{3k+1}$是优美图,其中 k 为自然数.

证明　定义 $C_{4k}\cup P_{3k+1}$顶点集上函数 θ 如下:

$$\theta(x_i)=\begin{cases}(i-1)/2, & i=1,3,\cdots,2k-1;\\ 1+(i-1)/2, & i=2k+1,2k+3,\cdots,4k-1;\\ 7k+1-i/2, & i=2,4,\cdots,4k;\end{cases}$$

当 k 为偶数时,定义

$\theta(y_i)=$

$$\begin{cases} k, & i=1;\\ 4k, & i=2;\\ 2k+1+(i-4)/2, & i=4,6,\cdots,3k;\\ 5k-(i-3)/2, & i=3,5,\cdots,2k+1;\\ 5k-(i-1)/2, & i=2k+3,2k+5,\cdots,3k+1;\end{cases}$$

当 k 为奇数时，定义

$$\theta(y_i)=\begin{cases} k, & i=1;\\ 4k, & i=2;\\ 2k+1+(i-4)/2, & i=4,6,\cdots,3k+1;\\ 5k-(i-3)/2, & i=3,5,\cdots,2k+1;\\ 5k-(i-1)/2, & i=2k+3,2k+5,\cdots,3k;\end{cases}$$

由定义，θ 在 C_{4k} 顶点集上函数值的集合为：

$\{0,1,\cdots,k-1\}\cup\{k+1,k+2,\cdots 2k\}\cup\{5k+1,\cdots,7k-1,7k\}$，

θ 在 P_{3k+1} 顶点集上函数值的集合，当 k 为偶数时为：

$\{k\}\cup\{4k\}\cup\{2k+1,\cdots,7k/2-1\}\cup\{4k+1,\cdots,5k\}\cup\{7k/2,\cdots,4k-1\}$，

当 k 为奇数时为

$\{k\}\cup\{4k\}\cup\{2k+1,\cdots,(7k-1)/2\}\cup\{4k+1,\cdots,5k\}\cup\{(7k+1)/2,\cdots,4k-1\}$，

由 θ 函数值的集合，容易求得它在 C_{4k} 边上的诱导值集合为：$\{3k+1,\cdots,7k\}$，在 P_{3k+1} 边上的诱导值集合为：$\{1,2,\cdots,3k\}$. 显然 θ 是优美标号，则在此标号下，$C_{4k}\cup P_{3k+1}$ 是优美图.

参考文献：

[1] 杨燕昌，王广选. 图 $P_n\cup P_m$ 的优美性初探[J]. 北京工业大学学报，1993，19(4)：15－26.

[2] 杨燕昌，王广选. 一些图 $P_n\cup P_m$ 的优美性[J]. 广西大学学报(自然科学版)，1993，18(2)：87－94.

[3] Gallian J A. A dynamic survey of graph labeling[J]. The E J of Combinatorics，2001，12.

[4] 梁志和. 关于图标号问题[J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，2000，24(3)：300－303.

[5] 高印芝. 图 $C_n\cup P_4$ 的优美性(I)[J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，1999，23(1)：19－22.

[6] 马克杰. 优美图[M]. 北京：北京大学出版社，1991.

On the Gracefulness of Some Graphs $C_{4k}\cup P_n$

SONG Qing-hua

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Graceful labelings of $C_{4k}\cup P_n$ is given when $n=k+2,2k+1,2k+2,2k+3,3k,3k+1$.

Key words: cycle; path; gracefulness; labeling

(上接第 131)

[7] 李洪兴，汪群，段钦治，等. 工程模糊数学方法及应用天津[M]. 科学技术出版社. 1991.

[8] 胡昌寿. 可靠性工程－设计、试验、分析、管理(上册)[M]. 北京：宇航出版社 1989.

[9] 杨松林. 工程模糊论方法及其应用[M]. 北京：国防工业出版社. 1996.

[10] 张骏华. 结构可靠性设计与分析[M]. 北京：宇航出版社. 1989.

Theoretical Analysis on Fuzzy Reliability of Multi-degree-of-freedom Anti-resonant Machinery

HUANG Zhi-chao

(School of Mechanical and Electronic Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The paper shows the membership function of anti-resonance fuzzy subject and the equation of fuzzy reliability, by combining fuzzy probability and multi-degree-of-freedom anti-resonance theory and analyzing the anti-resonance frequency randomicity, the electromotor rotate speed randomicity and vibration spring asymmetry. The equation can help to prove fuzzy reliability and design. Some examples are provided.

Key words: anti-resonance; fuzzy reliability; membership function; multi-degree-of-freedom