文章编号：1005－0523(2006)02－0129－03

关于图的符号边全控制

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院，江西 南昌 330013)

摘要：引入了图的符号边全控制的概念，主要刻划了满足 $\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$ 且 $\delta(G)\geq 2$ 的所有连通图 G，给出了 n 阶 k－正则图 G 的符号边全控制数 $\gamma'_{st}(G)$ 的下限，确定所有轮图的符号边全控制数，最后还提出了一个关于 $\gamma'_{st}(G)$ 上界的猜想.

关　键　词：符号边全控制函数；符号边全控制数；轮图

中图分类号：AMS(2000)05C/CLC No：O157.5　　　　**文献标识码：**A

1　引言

本文所指的图均为无向简单图，文中未说明的符号和术语同于文献[1].

设 $G=(V,E)$ 为一个图，其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$，对于任意 $u\in V(G)$，则 $N_G(u)$ 为 u 点在 G 中的邻域，$N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 为 u 点在 G 中的闭邻域，$\delta=\delta(G)$ 和 $\triangle=\triangle(G)$ 分别为图 G 和最小度和最大度. 若 $e\in E(G)$，则 $N_G(e)$ 表示 G 中与 e 相邻的边的集合，称为 e 在 G 中的边邻域，而称 $N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$ 为 e 在 G 中的闭边邻域. 若 $v\in V(G)$ 则 $E_G(v)$ 表示 G 中与 v 点相关联的边集. 为了方便，有时将 $N_G(u)$，$N_G[u]$，$N_G(e)$，$N_G[e]$ 和 $E_G(v)$ 分别简记为 $N(u)$，$N[u]$，$N(e)$ 和 $N[e]$ 和 $E(v)$. 若 u、$v\in V(G)$ 则 $d_G(u,v)$ 表示 u、v 两点在 G 中的距离.

近些年来，图的控制理论的研究内容越来越丰富，其应用也越来越广泛，*W. T. Haynes* 等[2]较为系统地综述了近期的一些主要研究成果. 就图的符号控制而言，我们已将图的点符号控制概念[5～7]转向研究边符号控制问题，如符号边控制[3] 和符号星控制[4]等. 为此，我们引入符号边全控制概念：

定义 1　设 $G=(V,E)$ 为一个 n 阶连通图($n\geq 3$)，一个函数 $f:E\rightarrow\{-1,+1\}$ 被称为图 G 的一个符号边全控制函数，如果对于 G 中每一条边 e 均有 $\sum_{e'\in N(e)}f(e')\geq 1$ 成立. 图 G 的符号边全控制数定义为 $\gamma'_{st}(G)=\min\{\sum_{e\in E(G)}f(e)|f$ 为图 G 的符号边全控制函数$\}$.

补充定义：$\gamma'_{st}(K_1)=0$ 的 $\gamma'_{st}(K_2)=1$，并且对于任意两个点不交的图 G_1 和 G_2，$\gamma'_{st}(G_1\cup G_2)=\gamma'_{st}(G_1)+\gamma'_{st}(G_2)$. 因此，对任意图 G，$\gamma'_{st}(G)$ 均是存在的.

根据上述定义可知：对任意图 G，均有 $\gamma'_{st}(G)\leq|E(G)|$，并且不难看出：

引理 2　对任意图 G，若 $\triangle(G)\leq 2$，则有 $\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$

引理 3　对任意图 G，则有 $\gamma'_{st}(G)\equiv|E(G)|\ (\mathrm{mod}2)$

在本文中我们主要刻划了满足 $\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$ 且 $\delta(G)\geq 2$ 的所有连通图 G，给出了正则图 G 的符号边全控制数 $\gamma'_{st}(G)$ 的下限，确定几类特殊图的符号边全控制数，最后还提出了一个关于 $\gamma'_{st}(G)$ 上界的猜想.

收稿日期：2006－01－22

基金项目：江西省自然基金资助课题(0311047)江西省教育厅课题(05122)

作者简介：徐保根(1963－)，男，江西南昌人，教授.

2 主要结果

我们首先划了满足且 $\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$ 且 $\delta(G)\geq 2$ 的所有连通图 G.

定理 1 设 G 为一个连通图,且 $\delta(G)\geq 2$,令 $A=A(G)=\{v\in V(G)|d_G(G)\geq 3\}$, 则

$\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$ 当且仅当 G 为下面三类图之一:

(1)当 $|A|=0$ 时; $G=C_n(n\geq 3)$ 为一个圈;

(2)当 $|A|=1$ 时; G 是一个由具有一个公共顶点的若干个长度不小于 4 的圈组成的图;

(3)当 $|A|\geq 2$ 时; G 为满足 A 中任何两点的距离不小于 4 的图.

证明:充分性是显然的.

必要性:由于 $\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$ 等价于:对图 G 的任意一个符号边全控制函数 f 和 G 的任意一条边 e,均有 $f(e)=+1$. 注意到 G 为连通图且 $\delta(G)\geq 2$,因此有:

(1)当 $|A|=0$ 时;即 $A=\varnothing$, G 为一个 2-正则连通图,故 $G=C_n(n\geq 3)$ 为一个圈.

(2)当 $|A|=1$ 时;即令 $A=\{v\}$, G 中除 v 点外其余各顶点的度均为 2,可见 G 是一个由若干个(至少两个)圈组成的图,这些圈具有一个公共顶点 v. 假若这些圈中有一个长度为 3 的圈 C_3,在这个 C_3 中与 v 点不相关联的边记为 e_0, 定义 f 如下:

$$f(e)=\begin{cases}-1 & \text{当 } e=e_0 \text{ 时;}\\ +1 & \text{当 } e\neq e_0 \text{ 时;}\end{cases}$$

显然 f 为图 G 的一个符号边全控制函数,并且有 $\gamma'_{st}(G)\leq\sum_{e\in E(G)}f(e)=|E(G)|-2$,这与 $\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$ 矛盾. 因此 G 中没有长度为 3 的圈,即 G 是一个由具有一个公共顶点的若干个长度不小于 4 的圈组成的图.

(3)当 $|A|=t\geq 2$ 时;即令 $A=\{u_1,u_2,\cdots,u_t\}$.

假若 A 中存在距离小于 4 的两个顶点;不妨设 $d_G(u_1,u_2)=s\leq 3$, 即 G 中有一条长度为 s 的路 $P_{s+1}: u_1\to v_1\to v_2\to\cdots\to u_2$. 记 $e_0=u_1v_1$, 同样地定义 f 如下:

$$f(e)=\begin{cases}-1 & \text{当 } e-e_0 \text{ 时;}\\ +1 & \text{当 } e\neq e_0 \text{ 时;}\end{cases}$$

显然 f 为图 G 的一个符号边全控制函数,并且有 $\gamma'_{st}(G)\leq\sum_{e\in E(G)}f(e)$ $=|E(G)|-2$,这与 $\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$ 矛盾. 因此 A 中任何两点的距离不小于 4. 定理 1 证毕. #

下面给出正则图符号边全控制数的一个下界:

定理 2 对任意 n 阶 k-正则连通图 $G(k\geq 2)$,均有

$$\gamma'_{st}(G)\geq\left\lceil\frac{kn}{4(k-1)}\right\rceil$$

证明 设 $G=(V,E)$, f 为图 G 的一个符号边全控制函数,且使得 $\gamma'_{st}(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)$.

令: $E_1=\{e\in E|f(e)=+1\}$, $E_2=\{e\in E|f(e)=-1\}$,并且记 $|E_1|=s$, $|E_2|=t$. 不难看出: $|E|=\frac{kn}{2}$ $=m=s+t$, $\gamma'_{st}(G)=s-t$.

定义图 G 的两个子图 G_1 和 G_2 如下: $V(G_1)=V(G_2)=V$, $E(G_1)=E_1$, $E(G_2)=E_2$.

$\forall$ v $\in V(G)$,定义 v 点分别在 G_1 和 G_2 中的度数差为 $d^*(v)=d_{G_1}(v)-d_{G_2}(v)$ 易见, $\sum_{v\in V}d^*(v)$

$$=\sum_{v\in V}(d_{G_1}(v)-d_{G_2}(v))=2(s-t)=2\gamma'_{st}(G) \quad (1)$$

对于 G 的每一条边 $e=uv$,由符号边全控制函数 f 的定义知:

$d^*(u)+d^*(v)-2f(uv)\geq 1$,

从而 $\sum_{uv\in E}(d^*(u)+d^*(v)-2f(uv))\geq m$,注意到 G 为 n 阶 k-正则图,即有

$$\sum_{v\in V}kd^*(v)\geq 2\gamma'_{st}(G)+m \quad (2)$$

这里 $m=\frac{kn}{2}$. 结合(1)和(2)式得 $\gamma'_{st}(G)\geq\frac{kn}{4(k-1)}$,由于 $\gamma'_{st}(G)$ 为整数,我们完成了定理 2 的证明. #

下面考虑几类特殊图的符号边全控制数:

定理 3 设 $W_{n+1}=C_n+K_1$ 为 $n+1$ 阶轮图($n\geq 3$),则有

$$\gamma'_{st}(W_{n+1})=\begin{cases}n & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\ n+1 & \text{当 } n \text{ 为奇数时;}\end{cases}$$

证明 由于 $n=3$ 时定理显然成立,下设 $n\geq 4$.

记: $G=W_{n+1}$, f 为图 G 的一个符号边全控制函数,且使得 $\gamma'_{st}(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)$. 并记 W_{n+1} 的中心点为 v_0,即 $V(K_1)=\{v_0\}$, C_n 上的顶点依次记为 v_1, $v_2,\cdots,v_n$ 显然 $E(G)=\{v_0v_i\}|1\leq i\leq n\}\cup\{v_jv_{j+1}|1\leq j\leq n-1\}\cup\{v_nv_1\}$, $|E(G)|=2n$.

记: $A=\{v_0v_i|1\leq i\leq n\}$, $B=\{v_jv_{j+1}|1\leq j\leq n-1\}\cup\{v_nv_1\}$,即有 $E(G)=A\cup B$.

为了方便,我们称适合 $f(e)=+1$ 的边为+1 边;称适合 $f(e)=-1$ 的边为-1 边;设 G 中+1 边

和-1边的数目分别为s和t,从而有$2n=s+t$,$\gamma'_{st}(G)=s-t$

首先证明:$\gamma'_{st}(G)\geq n$ (1)

(反证)假若$\gamma'_{st}(G)\leq n-1$,则有$t\geq\frac{n+1}{2}$.

情况1 所有的-1边均在A中;则G中必有一个三角形包含两条-1边(在A中),该三角形的一条$+1$边为e(在C_n上),可见$\sum_{e'\in N(e)}f(e')=0$,这与f为图G的一个符号边全控制函数矛盾.

情况2 所有的-1边均在B中;即所有的-1边均在C_n上,则C_n上必有一条长为3的路P_4,该路的两端边均为-1边.不妨设$P_4=(v_1v_2v_3v_4)$,即v_1v_2和v_3v_4均为-1边,记$e=v_2v_3$,可见$\sum_{e'\in N(e)}f(e')=0$,同样,这与f为图G的一个符号边全控制函数矛盾.

情况3 B中有r条-1边($1\leq r\leq\frac{n}{2}$;则A中至多有$\frac{n-2r}{2}$条-1边(否则,G中必有一三角形包含两条-1边,与情况1一样得出矛盾).从而G中-1边数目$t\leq r+\frac{n-2r}{2}=\frac{n}{2}$,这与$t\geq\frac{n+1}{2}$矛盾.

至此,我们证明了(1)式成立,注意到$|E(G)|=2n$为偶数,由引理3知$\gamma'_{st}(G)$为偶数,故有

$$\gamma'_{st}(W_{n+1})\geq\begin{cases}n & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\ n+1 & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}\qquad(2)$$

下面定义图$G=W_{n+1}=C_n+K_1$的一个符号边全控制函数f如下:

$$f(e)=\begin{cases}(-1)^{i+1} & \text{当 } e=v_0v_i \text{ 时;}\\ +1 & \text{当 } e\in E(C_n)\text{时;}\end{cases}$$

这里对每个$i(1\leq i\leq n)$.因此

$$\gamma'_{st}(W_{n+1})\leq\sum_{e\in E(G)}f(e)=\begin{cases}n & \text{当 } n \text{ 为偶数时;}\\ n+1 & \text{当 } n \text{ 为奇数时;}\end{cases}$$

结合(2)式,定理3证毕.♯

最后我们提出如下:

问题1 如何确定完全二部图$K_{m,n}$的符号边全控制数?

猜想2 对任意n阶图G,均有$\gamma'_{st}(G)\leq\frac{4(n-1)}{3}$.

如果猜想正确的话,则此上界是最好可能的.例如,G为若干个具有一个公共顶点的C_4组成的图,显然使猜想中等式成立.

参考文献:

[1] J.A.Bondy,V.S.R.Murty,Graph Theory with Applications[M].Elsevier,Amsterdam,1976.

[2] T.W.Haynes,S. T.Hedetniemi, and P.J.Slater,Domination in graphs[M].New York,1998.

[3] Baogen.Xu ,On signed edge domination numbers of graphs[J].Discrete Math. 239 (2001):179～189

[4] Baogen. Xu ,On edge domination numbers of graphs[J].Discrete Math. 294 (2005):311～316

[5] Baogen.Xu,E.J.Cockayne,T.W.Haynes,S.T.Hedetniemi,S.Zhou,Extremal graphs for inequalities involving domination parameters[J].Discrete Math. 216(2000) 1～10.

[6] Baogen.Xu,On minus domination and signed domination in graphs[J].数学研究与评论,2003(4):586～590.

[7] E.J.Cockayne,C.M.Mynhart,On a generalization of signed domination functions of graphs[J],Ars. Combin. 43 (1996):235～245.

On Signed Edge Total Domination Numbers of Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science,East China Jiaotong University,Nanchang 330013,China)

Abstract:In this paper we introduce the concept of signed edge total domination number $\gamma'_{st}(G)$ of a graph G,characterize all connected graphs with $\delta(G)\geq 2$ and $\gamma'_{st}(G)=|E(G)|$.obtain a lower bound of $\gamma'_{st}(G)$ for all k-regular graphs of order n,and determine the exact value of $\gamma'_{st}(W_{n+1})$ of for all wheels W_{n+1},In addition,we pose a conjecture about the upper bound of $\gamma'_{st}(G)$.

Key words:Signed edge total domination function;signed edge total domination number;wheel.