

文章编号: 1005-0523(2006)02-0141-03

一类三种群食物链模型的混沌及其控制

闫丽宏, 常迎香

(兰州交通大学 数理与软件工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要:对 Hastings 和 Powell 提出的三种群食物链模型在稳定点的性态作了分析, 并利用 MATLAB 进行数值仿真, 说明了该系统产生混沌的过程, 同时考虑到浮游植物的毒素释放作用, 引入毒素释放率近似函数将系统状态控制到有序.

关键词:Hastings 和 Powell 生态模型; 混沌; 混沌控制

中图分类号:Q141, Q175

文献标识码:A

0 引言

Hastings 和 Powell 于 1991 年提出了一个具有混沌动力学行为的三种群食物链模型[1], 随后人们对该模型的动力学性质作了许多研究, 通过多种途径消去该系统的混沌和极限环振荡行为, 从而使系统稳定. 文[2]考虑到种间密度倚赖 IDD(Intraspecific Density Dependence)作用, 对该系统的混沌作了控制. 本文考虑到另一因素——浮游植物毒素释放作用 TPP(Toxin Producing Phytoplankton), 当浮游植物释放毒素时, 将导致浮游动物的死亡率上升, 从而间接地影响鱼类的数量. 考虑到这一因素, 本文将引入毒素释放率近似函数, 对该系统产生的混沌吸引子——‘teacup’作一控制.

1 模型的引入及分析

1) 由 Hastings 和 Powell 提出的模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - \frac{C_1 A_1 XY}{B_1 + X} \\ \frac{dY}{dT} = \frac{A_1 XY}{B_1 + X} - \frac{A_2 YZ}{B_2 + Y} - D_1 Y \\ \frac{dZ}{dT} = \frac{C_2 A_2 YZ}{B_2 + Y} - D_2 Z \end{cases} \quad (1)$$

其中 X, Y 分别代表浮游植物和动物的数量, Z 代表鱼类的数量, R_0, K_0 分别代表种群 X 的自然增长率和其荷载能力, C_1, C_2 分别代表种群 X 向种群 Y, Z 的转化率, $A_i, B_i (i=1, 2)$ 表示 Hastings 和 Powell 所构造的反馈饱和函数中的参数, D_1, D_2 分别表示种群 Y, Z 的死亡率[1].

上式中令 $x = \frac{X}{K_0}, y = \frac{C_1 Y}{K_0}, z = \frac{C_1 Z}{C_2 K_0}, t = R_0 T$

则系统(1)转变为如下无量纲形式:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{a_1 xy}{1+b_1 x} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{a_1 xy}{1+b_1 x} - \frac{a_2 yz}{1+b_2 y} - d_1 y = yg(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{a_2 yz}{1+b_2 y} - d_2 z = zh(y) \end{cases} \quad (2)$$

2) 现对该系统进行化简, 通过计算, 可知上述系统所对应的雅可比矩阵如下:

收稿日期: 2005-12-26

作者简介: 闫丽宏(1981-), 女, 汉, 山西离石人, 硕士研究生.

$$\begin{cases} 1-2x-\frac{a_1y}{(1+b_1x)^2} & -\frac{a_1x}{1+b_1x} & 0 \\ \frac{a_1y}{(1+b_1x)^2} & \frac{a_1x}{1+b_1x}-\frac{a_2z}{(1+b_2y)^2}-d_1 & -\frac{a_2y}{1+b_2y} \\ 0 & \frac{a_2z}{(1+b_2y)^2} & \frac{a_2y}{1+b_2y}-d_2 \end{cases} \quad (3)$$

特别地,在平衡点(0,0,0)处,相应矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & -d_2 \end{pmatrix}$$

易知,该矩阵的特征值为: $\lambda_1=1, \lambda_2=-d_1, \lambda_3=-d_2$. 若 d_1, d_2 全不为 0, 则(0,0,0)为系统的双曲点,进一步,根据 Routh Hurwitz 判据,我们可以得到:

- 1) 若 $d_1 < 0, d_2 < 0$, 则坐标原点为系统的不稳定结点.
- 2) 若 d_1, d_2 异号,不妨设 $d_1 < 0, d_2 > 0$, 则点(0,0,0)为系统的不稳定鞍结点;根据分叉理论,对参数或作变动,利用 MATLAB 仿真,易作出系统在原点的分叉图.

上述分析的生态学意义是十分明显的,原点所代表的状态是猎物和捕食者都不存在的情形,由于作为鞍点它是不稳定的,这表明只要稍有偏离(如产生浮游植物),系统便要远离它而去.

$$\text{对于系统的另一组平衡点} \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y,z)=0 \\ h(y)=0 \end{cases} \quad (4)$$

通过实地考察,查阅相关资料[3][7][8]和大量的数值仿真实验,取相关参数如下:

$a_1=5, 0, a_2=0.1, b_2=2, 0, d_1=0.4, d_2=0.01, b_1=0.5$ 时,上述方程组的解是 $x_1=(-3.3028, 0.3028)^T, y_1=(-0.5606, -0.1606)^T, z_1=(-30.2192, 12.0859)^T$. 类似的,可以判断他们以及其他奇点的稳定性.

现取初值 $(x_0, y_0, z_0) = (0.3, 0.15, 5.00)$ (初值与实际比值为 1:10000). 此时,系统在该点所对应的雅可比矩阵如右: $J(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} -0.8967 & -2.7273 & 0 \\ -0.3967 & 2.0314 & -0.0089 \\ 0 & 0.2959 & 0.0015 \end{pmatrix}$

其特征值为: $\lambda = (2.3623, -1.2284, 0.0023)^T$. 根据稳定性及分理论[4][5],可知点(0.75, 0.15, 5.00)为系统的不稳定鞍结点,而且系统在该点发生静态分叉一鞍结分叉,进而导致混沌. 在述初值和参数选定情况下,我们利用四阶 Runge-Kutta 方法作该系统状态发生变化的情形,稳定点和混沌相图如下:

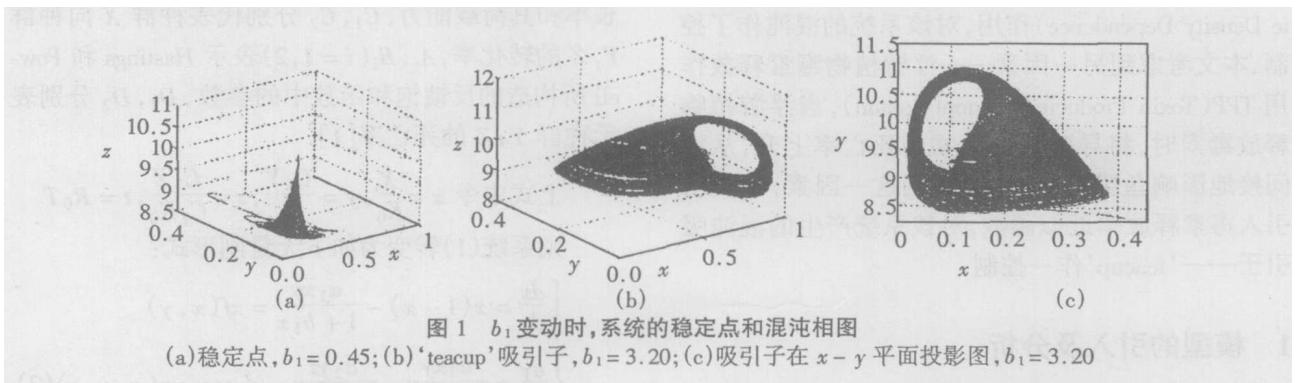


图1 b_1 变动时,系统的稳定点和混沌相图

(a) 稳定点, $b_1=0.45$; (b) 'teacup' 吸引子, $b_1=3.20$; (c) 吸引子在 $x-y$ 平面投影图, $b_1=3.20$

2 模型的混沌控制

在文献[2]中,作者考虑了种间密度依赖(IDD)和外部随机扰动(ESD)因素,在原 Hastings 和 Powell 模型中添加了控制项,使系统的混沌得到了控制. 下面将考虑到浮游植物释放毒素作用,这使得浮游动物的死亡率上升,从而缓解其对浮游植物的捕食作用,间接地影响鱼类的数量.

一般来说,分析某动力系统的方法,一方面是

画吸引子,另一方面是作系统的分叉图. 下面我们通过数值仿真,利用 MATLAB 说明引入 TPP 作用后系统的混沌控制情况. 不妨设: $f_1(X) = \frac{\beta_1 X}{B_1 + X}, f_2(Y) = \frac{\beta_2 Y}{B_2 + Y}$, 其中 $f_1(X)$ 是浮游植物释放毒素过程的函数, β_1 指浮游植物毒素释放率. 类似的, $f_2(X)$ 指鱼类受浮游植物影响的近似函数. 引入该项,是考虑到浮游植物释放毒素时,使得浮游动物的死亡量增加,从而缓解浮游植物的捕食压力,同时间接地影响鱼类的数量. 这时在系统(1)的后两个方程

中引入非线性项 $f_1(X)Y, f_2(Y)Z$, 依旧作如(1)的变换, 得到:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = x(1-x) - \frac{a_1xy}{1+b_1x} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{a_1xy}{1+b_1x} - \frac{a_2yz}{1+b_2y} - d_1y - \frac{\theta_1xy}{1+b_1x} \\ \frac{dz}{dt} = \frac{a_2yz}{1+b_2y} - d_2z - \frac{\theta_2yz}{1+b_2y} \end{cases} \quad (5)$$

我们再取一组初值, $(x_0, y_0, z_0) = (0.30, 0.05, 10.00)$, 经验证, 该数据与实际相符.

固定 $\theta_2=0.01$, 除 θ_1 外, 其余参数与上同. 具体数值如下: $a_1=5.0, a_2=0.1, b_2=2.0, d_1=0.4, d_2=0.01, b_1=2.8, \theta_2=0.01$ 利用 MATLAB 仿真, 分别取 $\theta_1=2.5, \theta_1=1.5, \theta_1=0.2$, 作系统(5)的二周期, 极限环和稳定点相图. 如下所示:

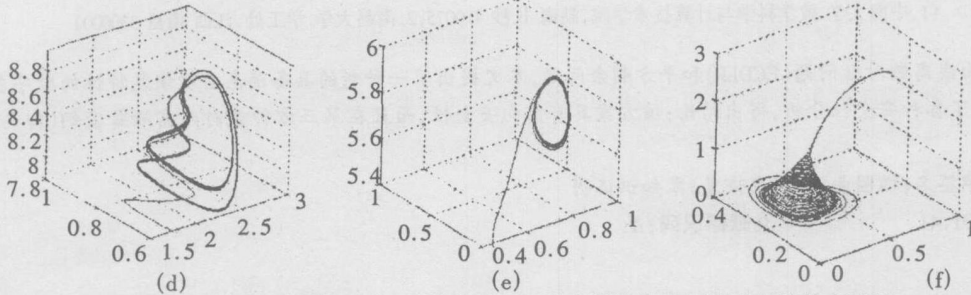


图2 引入近似函数 $f_1(X)Y, f_2(Y)Z$ 后, 系统由混沌状态到稳定态的转变过程
(d)二周期, $\theta_1=2.5$; (e)一周期, $\theta_1=1.5$; (f)稳定点 $\theta_1=0.2$

从上图我们可以明显看到, 系统的混沌状态在引入 TPP 项后完全得到了控制. 同时经过验证, 整个过程与实际相符, 与生态学意义想吻合.

参考文献:

[1] Hastings, A., Powell, T., Chao sinthree-species food chain. ECOLOGY, 1991, 72(3), 896-903.
 [2] Cailin Xu, Zizhen Li, Influence of int raspecific density dependence onathree-species food chain with and without external stochastic disturbances. ECOLOGY MODELLING, 2002, 155: 71-83.
 [3] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法, 北京: 科学出版

社, 1988.

[4] 马知恩, 周义仓. 常微分方程的定性稳定性. 北京: 科学出版社, 2001.
 [5] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程的几何理论与分支问题, 北京: 北京大学出版社, 2000.
 [6] Andrew M. Edwards, John Brindley. Zooplankton mortality and the dynamical behavior of plankon population models. BULLETIN OF MATHEMATICAL BIOLOGY, 1999. 61: 303-339.
 [7] Begon, M., Mortimer, M., Population Ecology - A Unified Study of Animals and Plants, 2nd edition, Blackwell, Oxford, 21-45, 173-192.
 [8] Yodzis, P., Predator-preytheory and management of multi-species fisheries. Ecol. Appl. 1994, 51-58.

Chaos and Control of a Three Species Food Chain Model

YAN Li-hong, CHANG Ying-xiang

(Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Quality analysis of a three species food chain model proposed by Hastings and Powell is studied in this paper, and the chaos produced process is showed by MATLAB, finally the system is controlled from chaos to order when the effect TPP is considered.

Key words: Hastings & Powell biological model; chaos; chaos control.