文章编号:1005-0523(2006)02-0147-03

Bottema不等式的一个新加强

刘 健[1],张 华[2]

(1.华东交通大学体育学院,江西 南昌 330013;2.丰城市第一中学,江西 丰城 331100)

摘要:应用两个已知的几何不等式与反演变换,建立了一个强于Bottema不等式的新结果,给出了新结果的几个推论,指出了一个有趣的极值问题的结论,提出了一个未解决的问题与一个猜想.

关 键 词:三角形;点;正数;不等式

中图分类号:O.178 **文献标识码**:A

1 引言与主要结果

设△ABC的面积为△,△A′B′C′的三条边长与面积分别为a',b',c',△′,则对任意一点P有

$$(a'PA+b'PB+c'PC)^2\geqslant 16\triangle\triangle' \quad (1)$$

等号当且仅当△ABC与△A′B′C′为相似的锐角三角形且P为△ABC的垂心时成立.

不等式(1)是一个为数不多的涉及两个三角形的优美不等式,被称为Bottema不等式(参见专著[1].在文献[2]中,本文第一作者给出了这一不等式的推广.在最近的文献[3]中,又应用它建立了涉及两个三角形与两个动点的一个漂亮的几何不等式.

我们已经知道,O.Bottema早在1944年即已得出较(1)式更强的结果(参见[1]):

$$(a'PA+b'PB+c'PC)^2\geqslant 8\triangle\triangle'+\frac{1}{2}M \quad (2)$$

其中

$$M=a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)$$

(a,b,c为△ABC的三条边长,下同此)由著名的Neuberg-Pedoe不等式(参见[1]):

$$M\geqslant 16\triangle\triangle' \quad (3)$$

可知,不等式(2)强于不等式(1).不等式(2)的证明可见专著[1].

本文中,我们从另一个角度,对于平面上任意一点给出Bottema不等式(1)一个新的加强:

定理 对△A′B′C′与△ABC平面上任意一点P有

$$\frac{(a'PA+b'PB+c'PC)^2}{aPA+bPB+cPC}\geqslant 4\triangle', \quad (4)$$

等号当且仅当△ABC与△A′B′C′为相似的锐角三角形且P为△ABC的垂心时成立.

由Bottema不等式的特款:

$$aPA+bPB+cPC\geqslant 4\triangle, \quad (5)$$

可知不等式(4)加强了Bottema不等式(1).

2 定理的证明

在证明定理之前先给出三个引理.

引理1 符号同上,则对任意正数x,y,z有

$$(xaa'+ybb'+zcc')^2\geqslant 16(yz+zx+xy)\triangle\triangle', \quad (6)$$

等号当且仅当△ABC∽△A′B′C′且x∶y∶z=cot$A$∶cot$B$∶cot$C$时成立.

引理2 设△ABC的半周长为s,则对任意一点P有

收稿日期:2006-12-07

作者简介:刘 健(1963-),男,江西兴国人,助理研究员(中级).

$$PA\cos\frac{A}{2}+PB\cos\frac{B}{2}+PC\cos\frac{C}{2}\geqslant s, \tag{7}$$

等号当且仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时成立.

上述引理的不等式即为本文第一作者建立的一个多边形不等式的特款,参见文献[5].较直接的证明可参见文献[6].

引理3 设有关于 $\triangle ABC$ 及其平面上任意一点 P 的齐次不等式:

$$f(a,b,c,PA,PB,PC)\geqslant 0. \tag{8}$$

则此不等式经变换I:

$(a,b,c,PA,PB,PC)\to$

$(aPA,bPB,cPC,PB\cdot PC,PC\cdot PA,PA\cdot PB)$ 后仍成立.

引理3所述变换即为反演变换,证明可参见文献[7].

定理的证明 在引理1的不等式(6)中作置换:$x\to\frac{x}{a}$, $y\to\frac{y}{b}$, $z\to\frac{z}{c}$,然后应用面积公式 $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A$,则得等价式:

$$(xa'+yb'+zc')^2$$
$$\geqslant 8(yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C)\triangle', \tag{9}$$

易知上式等号当且仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 且 $x:y:z=\cos A:\cos B:\cos C$ 时成立.

注意到存在着以 $\frac{\pi-A}{2}$, $\frac{\pi-B}{2}$, $\frac{\pi-C}{2}$ 为内角的三角形,因此可在(9)式中作角变换:$A\to\frac{\pi-A}{2}$, $B\to\frac{\pi-B}{2}$, $C\to\frac{\pi-C}{2}$,则得

$$(xa'+yb'+zc')^2$$
$$\geqslant 8\left(yz\cos\frac{A}{2}+zx\cos\frac{B}{2}+xy\cos\frac{C}{2}\right)\triangle', \tag{10}$$

等号当且仅当 $A=\frac{\pi-A}{2}$, $B=\frac{\pi-B}{2}$, $C=\frac{\pi-C}{2}$ 且 $x:y:z=\sin\frac{A}{2}:\sin\frac{B}{2}:\sin\frac{C}{2}$ 时成立.

当 P 点重合于 $\triangle ABC$ 的某一顶点时,很容易直接证明不等式成立(从略).对于不与顶点重合的任意一点 P,我们可在(10)式中取 $x=\sqrt{\frac{PB\cdot PC}{PA}}$, $y=\sqrt{\frac{PC\cdot PA}{PB}}$, $z=\sqrt{\frac{PA\cdot PB}{PC}}$,则得

$$\left(a'\sqrt{\frac{PB\cdot PC}{PA}}+b'\sqrt{\frac{PC\cdot PA}{PB}}+c'\sqrt{\frac{PA\cdot PB}{PC}}\right)^2$$
$$\geqslant 8\left(PA\cos\frac{A}{2}+PB\cos\frac{B}{2}+PC\cos\frac{C}{2}\right)\triangle'.$$

再按引理2的不等式(7)就知

$$\left(a'\sqrt{\frac{PB\cdot PC}{PA}}+b'\sqrt{\frac{PC\cdot PA}{PB}}+c'\sqrt{\frac{PA\cdot PB}{PC}}\right)^2$$
$$\geqslant 8s\triangle'. \tag{11}$$

按(7),(10)两式等号成立的条件可知,上式等号仅当 $A'=\frac{\pi-A}{2}$, $B'=\frac{\pi-B}{2}$, $C'=\frac{\pi-C}{2}$, P 为 $\triangle ABC$ 的内心且 $PA\sin\frac{A}{2}=PB\sin\frac{B}{2}=PC\sin\frac{C}{2}$ 时成立.由于 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时恰有 $PA\sin\frac{A}{2}=PB\sin\frac{B}{2}=PC\sin\frac{C}{2}$,因此,不等式(11)中等号成立的条件可简述为:仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心且 $A'=\frac{\pi-A}{2}$, $B'=\frac{\pi-B}{2}$, $C'=\frac{\pi-C}{2}$, P 为 $\triangle ABC$ 的内心且 $PA\sin\frac{A}{2}=PB\sin\frac{B}{2}=PC\sin\frac{C}{2}$ 时成立.

最后,我们在不等式(11)中作引理3的变换I,注意到 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 即得

$$(a'PA+b'PB+c'PC)^2$$
$$\geqslant 4(aPA+bPB+cPC)\triangle',$$

也即定理的不等式(4)成立.根据(11)式等号成立的条件与反演变换的性质(参见文献[7])即易知上式等号仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle' A'B'C'$ 且P为 $\triangle ABC$ 的垂心时成立.综上,定理得证.

3 讨论

首先我们指出,正如Bottema不等式(1)对空间任一点都成立一样,定理的不等式(4)也很可能对空间任一点都是成立的.如果这样的推测成立,如何找到完整的证明还需进一步探讨.

下面指出定理的几个推论.

推论1 对 $\triangle ABC$ 平面上任一点P有

$$(PA+PB+PC)^2$$
$$\geqslant\sqrt{3}(aPA+bPB+cPC). \tag{12}$$

按不等式(5)知上式强于已知的Bödewadt不等式:

$$(PA+PB+PC)^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle. \tag{13}$$

由Heron公式:

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

易得

$$16\triangle'^2=2(b'^2c'^2+c'^2a'^2+a'^2b'^2)$$
$$-a'^4-b'^4-c'^4. \tag{14}$$

显然存在着以 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ 为边长的三角形,据此由

不等式(4)与公式(14)就得

$$\frac{(\sqrt{a}PA+\sqrt{b}PB+\sqrt{c}PC)^2}{aPA+bPB+cPC}\geqslant\sqrt{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}.\qquad(15)$$

另由 Cauchy 不等式知

$(\sqrt{a}PA+\sqrt{b}PB+\sqrt{c}PC)^2\leqslant(aPA+bPB+cPC)(PA+PB+PC)$，于是可得有关和式 $PA+PB+PC$ 下界的下述已知不等式(参见文献[8])：

推论2　对△ABC平面上任一点P有

$$PA+PB+PC\geqslant\sqrt{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}.\qquad(16)$$

类似地，注意到已知的结论(参见文献[1]，[2])：以 $\sqrt{a(s-a)}$，$\sqrt{b(s-b)}$，$\sqrt{c(s-c)}$ 为边长可构成面积为 $\frac{1}{2}\triangle$ 的三角形．由不等式(4)可推得 Janous 不等式(参见[1]，[3])：

推论3　对△ABC平面上任一点P有

$$(s-a)PA+(s-b)PB+(s-c)PC\geqslant2\triangle.\qquad(17)$$

另外，我们顺便指出，由不等式(11)很容易得到本文第一作者早在1993即已得出的一个有关几何极值问题的结论：

过一点引三个给定长度的线段，则当定点为三个线段另外的三个端点构成的三角形的内心时，三个端点构成的三角形的周长为最大．

上述结论还启发我们提出以下

问题　试过一点引 $n(n\geqslant3)$ 条给定长度的线段，使得另外 n 个端点构成的 n 边形周长为最大．

最后，我们介绍由不等式(11)的特款：

$$\sqrt{\frac{PB\cdot PC}{PA}}+\sqrt{\frac{PC\cdot PA}{PB}}+\sqrt{\frac{PA\cdot PB}{PC}}\geqslant\sqrt{2\sqrt{3}s},\qquad(18)$$

受到启发提出的一个猜想：

猜想　设 $k\geqslant\frac{2(\ln3-\ln2)}{3\ln3-4\ln2}(\approx1.549\cdots)$，则对△ABC平面上任一点P有

$$PA^k+PB^k+PC^k\geqslant3\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}s\right)^k\qquad(19)$$

事实上，易证上式当 $k\geqslant2$ 成立．应用计算机对于开区间 $(1.549,2)$ 内一些具体的 k 值进行验证，结果表明以上猜想是很可能成立的．

参考文献：

[1]　D.S.Mitrinović，J.E.Pečarić and V.Volenec，Recent Advances in Geometric Inequalities[M].Kluwer Academic Publishers，1989.

[2]　刘　健．涉及多个三角形的不等式[J]．湖南数学年刊，1995，15(4)：29－41.

[3]　刘　健．Janous 不等式的一个等价式的推广[J]．华东交通大学学报，2004，21(2)：131－134.

[4]　安振平．关于一个三角形不等式的再讨论[J]．咸阳师专学报，1989，15(2)：55－57.

[5]　刘　健．关于锐角三角形的一个几何不等式[J]．华东交通大学学报，2000，17(1)：76－78.

[6]　刘　健．Carlitz-Klamkin 不等式的指数推广及其应用[J]．铁道师院学报，1998，16(4)：73－79.

[7]　刘　健．几个新的三角形不等式[C]．见：数学竞赛(第15辑)，长沙：湖南教育出版社，1992，10：80－100.

[8]　刘　健，褚小光．一个新的与 Fermat 问题相关的几何不等式[J]．华东交通大学学报，2003，20(1)：89－93.

A New Improvement of the Bottema Inequality

LIU Jian[1]，**ZHANG Hua**[2]

(1.East China Jiaotong University，Nanchang 330013；2.The First High school in Feng Cheng，Jiang Xi，331100，China)

Abstract：Two known geometric inequality and inverse transformation are employed to derive a new result that superior to Bottema inequality and get some deductions about the new result. Then an interesting conclusionabout extreme value are pointed out and an unsolved problem and a conjecture are put forward.

Key words：triangle；point；positive number；inequality