文章编号:1005-0523(2006)04-0119-03

关于图的符号路控制数

徐保根

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要:引入了图的符号路控制的概念, 给出了图G的符号路控制数$\gamma_p'(G)$的一个下界,证明了$\gamma_p'(T)\geq 1$对任何非平凡的树T成立,确定了完全图、圈、完全多部图和轮图的符号路控制数,并提出了若干未解决的问题和猜想.

关 键 词:符号路控制函数;符号路控制数;完全多部图;直和图

中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A

1 引言

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号、术语同于文献[1].

近些年来,图的控制理论的研究内容越来越丰富E.J.Cockayne[2]等人先后引入了图的许多不同类型的控制概念及其变化形式,W.T.Haynes等人出版了两部专著[3~4],较为系统地综述了近期的一些主要研究成果.然而,值得注意的是:几乎所有的概念和结果都是针对图的点控制而言,很少涉及图的边控制问题为了更进一步丰富和完善图的控制理论内容,我们已将图的点控制概念转向研究图的边控制问题,并获得了初步的研究成果,如符号边控制[5]、符号星控制[6]符号局部控制[7]等

设$G=(V,E)$为一个图,$u\in V(G)$则$N_(u)$和$N_G[u]$分别为u点在G中的邻域和闭邻域,$d_G(u)=|N_G(u)|$为u点在G中的度.若$S\subseteq V(G)$则G[S]表示S在G中的导出子图.若$e=uw\in E(G)$则$N_G(e)$表示G中与e相邻的边集,称为e在G中的边邻域,$N_G[e]=N_G(e)\cup\{e\}$为e在G中的闭边邻域.$\bar{G}$表示G的补图.为了方便,$N_G(u)$、$N_G[u]$、$d_G(u)$、$N_G(e)$和$N_G[e]$分别简记为N(u),N[u]、d(u)、N(e)和N[e].

若u和v为G的两点,则$d_G(u,v)$表示u与v在G中的距离

若G和H为两个点不相交的图,则用$G+H$表示图G与H的直和图,即在$G\cup H$中将G的每个顶点与H的每个顶点邻接所得的图.

对于图G中的一条路P,如果$G[V(P)]=P$则称P为G的一条无弦路.

若P为图G的一条无弦路,如果G中没有其它的无弦路包括P作为其真子图,则称P为G的一条极路.

下面我们引入符号路控制概念:

定义1 设$G=(V,E)$为一个无孤立点的图,一个函数$f:E\rightarrow\{-1,+1\}$被称为图G的一个符号路控制(Signed path domination)函数,如果$\sum_{e\in E(P)}f(e)\geq 1$对于G中每一条极路P均成立.图G的符号路控制数定义为$\gamma_P'(G)=\min\{\sum_{e\in E(G)}f(e)\mid f$为图G的符号路控制函数$\}$

并且对于所有的空图$\bar{K}_n$,则定义$\gamma_P'(\bar{K}_n)=0$

由上述定义1不难看出下面的两个引理:

引理1 对于任意两个点不相交的图G_1和

收稿日期:2005-10-08

基金项目:江西省自然科学基金课题,江西省教育厅课题(05122)

作者简介:徐保根(1963-),男,江西南昌人,教授.

G_2，均有

$$\gamma'_P(G_1 \cup G_2) = \gamma'_P(G_1) + \gamma'_P(G_2)$$

引理 2　对于任意图 G，均有 $\gamma'_P(G) \equiv |E(G)| \pmod 2$

对于任意图 G，由定义知 $\gamma'_P(G) \le |E(G)|$，在本文中我们给出了图的符号路控制数的下界，证明了 $\gamma'_P(T) \ge 1$ 对任何非平凡的树 T 成立，确定了完全图、圈、完全多部图和轮图的符号路控制数，并提出了若干未解决的问题和猜想.

2　主要结果

如果一个图 $G \ne K_1$，则称 G 为非平凡的图

定理 1　对于任意非平凡的树 T，均有 $\gamma'_P(T) \ge 1$，并且等式成立当仅当 T 为一条长度为奇数的路

证明　对 T 的阶数 $n = |V(T)|$ 用归纳法

当 $n=2$ 时定理显然成立，假若定理对于阶数小于 n 的一切树均成立，下面考虑任意一棵 n 阶树 T，当 T 为一条路时显然有 $\gamma'_P(T) \ge 1$，下设 T 不是路，即 $\triangle(T) \ge 3$.

设 f 为 T 的一个符号路控制函数且使得 $\gamma'_P(T) = \sum_{e \in E(T)} f(e)$. 记 v_0 为 T 的一个最大度点，v_0 点在 T 中的邻域 $N_T(v_0) = \{v_1, v_2, \cdots, v_t\}$，这里 $t = \triangle(T) \ge 3$.

令 T_i 表示在森林 $T - v_i$ 中 v_0 所在的分支$(i = 1, 2, \cdots, t)$. 由于 $d_T(v_0) = \triangle(T) \ge 3$，故有 $|V(T_i)| \ge 3$，并且 $f_i = f|_{T_i}$ 为 T_i 的一个符号路控制函数，由归纳假设知 $\gamma'_P(T_i) \ge 1$，从而 $\sum_{e \in E(T_i)} f(e) = \sum_{e \in E(T_i)} f_i(e) \ge \gamma'_P(T_i) \ge 1$，故 $\sum_{i=1}^{t} \sum_{e \in E(T_i)} f(e) \ge t$，即 $(t-1) \sum_{e \in E(T)} f(e) \ge 1$，我们有

$$\gamma'_P(T) = \sum_{e \in E(T)} f(e) \ge \frac{t}{t-1} > 1 \qquad (*)$$

由归纳原理，对一切 n 阶树 T，均有 $\gamma'_P(T) \ge 1$ 并且注意到当 $t = \triangle(T) \ge 3$ 时，由$(*)$式知 $\gamma'_P(T) > 1$，因此 $\gamma'_P(T) = 1$ 时 $\triangle(T) \le 2$，并由引理 2 知 T 为一条长度为奇数的路而当 T 为长度为奇数的路时显然有 $\gamma'_P(T) = 1$ 至此，定理 1 证毕　　♯

定理 2　对任意图 G，若 $|E(G)| = m$，且 G 中共有 k 条极路，则

$$\gamma'_P(G) \ge 2\left\lceil \frac{m+k}{k+1} \right\rceil - m$$

并且此下界是可达的

证明　设 f 为图 G 的一个符号路控制函数且使得 $\gamma'_P(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e)$.

令：$A = \{e \in E(G) \mid f(e) = +1\}$，$B = \{e \in E(G) \mid f(e) = -1\}$，$|A| = s$，$|B| = t$，显然有 $m = s + t$，$\gamma'_P(G) = s - t = 2s - m$. 由于每条边均至少在一条极路径中，即知 B 中每条边至少在一条极路上，而 G 中共有 k 条极路，故至少有一条极路 P 包含 B 中 $\lceil \frac{t}{k} \rceil$ 条边，由定义知 P 中至少包含 A 中的 $\lceil \frac{t}{k} \rceil + 1$ 条边，即有 $s \ge \lceil \frac{t}{k} \rceil + 1 \ge \frac{t+k}{k} = \frac{m-s+k}{k}$，从而有 $s \ge \frac{m+k}{k+1}$，注意到 s 为整数，因此 $\gamma'_P(G) = 2s - m \ge 2\lceil \frac{m+k}{k+1} \rceil - m$，定理 2 证毕♯

定理 3　设 G 为一个连通图，若 $\gamma'_P(G) = |E(G)|$，则 G 的直径 $d(G) \le 2$ 且 G 不含 C_5 作为导出子图

证明　由于 $\gamma'_P(G) = |E(G)|$，从而对 G 的任意一个符号路控制函数 f 及 G 中任意一条边 e，均有 $f(e) = 1$ 成立.

(反证)假若 G 的直径 $d(G) \ge 3$，则存在两点 u 和 v 使得 $d_G(u, v) = 3$. 记连接 u 和 v 且长度为 3 的路为 $P_4 = (uv_1v_2v)$，显然 P_4 是无弦路定义 f 如下：

$$f(e) = \begin{cases} -1 & \text{当 } e = v_1v_2 \text{ 时;} \\ +1 & \text{当 } e \in E(G) \setminus \{v_1v_2\} \text{ 时;} \end{cases}$$

不难验证：f 为图 G 的一个符号路控制函数，因而 $\gamma'_P(G) \le \sum_{e \in E(G)} f(e) = |E(G)| - 2$，矛盾.

若 G 中有一个导出子图为 C_5，则在 C_5 上任取一条边 e_0，定义 f 如下：$f(e_0) = -1$ 且当 $e \ne e_0$ 时 $f(e) = +1$，同样地，f 为 G 的符号路控制函数，因而 $\gamma'_P(G) \le \sum_{e \in E(G)} f(e) = |E(G)| - 2$，矛盾. 至此定理 3 证毕　　♯

定理 4　设 G_1 和 G_2 为两个点不交的图，且 $|G_1| = n_1$，$|G_2| = n_2$，则 G_1 与 G_2 直和图的符号路控制数 $\gamma'_P(G_1 + G_2) = n_1 n_2 + \gamma'_P(G_1) + \gamma'_P(G_2)$.

证明　记 $G = G_1 + G_2$，对于图 G 的任意一个符号路控制函数 f，当 $e = uv$ 且 $u \in V(G_1)$，$v \in V(G_2)$ 时，由于 $e = uv$ 是 G 的极路，故有 $f(e) = +1$. 而 $f|_{G_i}(i = 1, 2)$ 为 G_i 的一个符号路控制函数，因此 $\sum_{e \in E(G)} f(e) \ge n_1 n_2 + \gamma'_P(G_1) + \gamma'_P(G_2)$，由 f 的任意性得知：$\gamma'_P(G) \ge n_1 n_2 + \gamma'_P(G_1) + \gamma'_P(G_2)$.

另一方面，设 f_i 为 G_i 的一个符号路控制函数且使得 $\gamma'_P(G_i) = \sum_{e \in E(G_i)} f_i(e)(i = 1, 2)$. 定义 G 的函数

f 如下：

$$f(e)=\begin{cases} f_1(e) & \text{当 } e\in E(G_1)\text{时；} \\ f_2(e) & \text{当 } e\in E(G_2)\text{时；} \\ 1 & \text{当 } e=uv,\ u\in V(G_1)\text{且 } v\in V(G_2)\text{时；} \end{cases}$$

可见 f 为图 G 的一个符号路控制函数，因此 $\gamma'_P(G)\leq\sum_{e\in E(G)}f(e)=n_1n_2+\gamma'_P(G_1)+\gamma'_P(G_2)$，至此定理 4 证毕．　♯

下面我们考虑几类特殊图的符号路控制数

推论　若 $G=K(n_1,n_2,\cdots,n_t)$ 为完全 t-部图，则 $\gamma'_P(G)=|E(G)|$．

对于 n 阶圈 C_n 和 $n+1$ 阶轮 $W_{n+1}=C_n+K_1$，我们有

定理 5　(1)当 $n\geq3$ 时，$\gamma'_P(C_n)=\frac{7+(-1)^n}{2}$；

(2)当 $n\geq3$ 时，$\gamma'_P(W_{n+1})=n+\frac{7+(-1)^n}{2}$；

证明：略

3　未解决的问题与猜想

在本文的定理 3 中给出了适合 $\gamma'_P(G)=|E(G)|$ 的连通图的一个特征，进一步我们提出：

问题 1　如何刻划适合 $\gamma'_P(G)=|E(G)|$ 的所有连通图 G?

本文对非平凡的树 T 证明了 $\gamma'_P(T)\geq1$，并对一般图 G 给出了 $\gamma'_P(G)$ 的一个下界，但该下界依赖于图 G 的极路数目，为此我们提出：

问题 2　如何确定 n 阶连通图的最小符号路控制数？或者确定 m 条边连通图的最小符号路控制数?

对于一个图 G 的符号边控制数 $\gamma'_P(G)$，在[6]中我们证明了 $\gamma'_P(G)\geq|V(G)|-|E(G)|$，类似地我们有下面的：

猜想 3　对任意 $n(n\geq2)$ 阶连通图 G，均有 $\gamma'_P(G)\leq|V(G)|-|E(G)|$．

由定理 1 知，该猜想对树是成立的如果猜想正确的话，则此下界是最好可能的例如，若 G 是由一个完全图的各个顶点均增加一条悬挂边所得的图，不难证明：$\gamma'_P(G)=|V(G)|-|E(G)|$．

上述问题和猜想还有待于进一步的探讨．

参考文献：

[1] [1] J·A·Bondy, V·S·R·Murty, Graph Theory with Applications[M], Elsevier, Amsterdam, 1976

[2] E·J·Cockayne, C·M·Mynhart, On a generalization of signed domination functions of graphs[J]·Ars· Combin· 43 (1996) 235～245.

[3] T·W·Haynes, S· T·Hedetniemi, and P·J·Slater, Domination in graphs[M]·New York, 1998.

[4] T·W·Haynes, S· T·Hedetniemi, and P·J·Slater, Domination in graphs[M], New York, 1998.

[5] Baogen· Xu , On signed edge domination numbers of graphs [J]·Discrete Math· 239 (2001) 179～189.

[6] Baogen· Xu , On edge domination numbers of graphs[J]· Discrete Math· 294 (2005) 311～316.

[7] Baogen· Xu, Two classes of edge domination in graphs[J]· Discrete Appl· Math· 154 (2006) 1541～1546.

On Signed Path Domination in Graphs

XU Bao-gen

(School of Natural Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper we introduce the concept of signed path domination in graphs, give a lower bound for the signed path domination number $\gamma'_P(G)$ of a graph G, prove that $\gamma'_{(}T)\geq1$ holds for any non-trivial tree T, and determine the signed path domination numbersfor the complete t-partite graphs、cycles and wheels· In addition, we pose some open problems and conjectures·

Key words: signed path domination function; signed path domination number; complete t-partite graphs, direct sum graph·