文章编号:1005-0523(2006)04-0138-03

一类集值算子不动点定理

李志龙

(江西财经大学 信息管理学院,江西 南昌 330013)

摘要:在 Banach 空间中研究了一类集值算子的不动点存在性,在不附加连续性条件下得到了不动点存在性结果,且给出了其不动点的迭代收敛序列.

关 键 词:集值算子,不动点定理

中图分类号:O177.91 O175.11 **文献标识码**:A

近年来,众多文献研究了集值算子的不动点存在问题,往往对算子附加某种连续性假设或者是对集合附加某种紧性假设,本文在没有上述假设的条件下,只要求算子有一个上解或者下解,对集合附加了闭性,对一类集值算子进行了研究,我们将该集值算子的不动点问题转化为一个集值增算子的不动点问题,利用 Banach 压缩映象原理,从而获得新的不动点定理.

本文总设 E 为一 *Banach* 空间, P 为 E 中的锥,由其导出的半序为"$\leq$",为了行文方便,我们引入下面的概念.

集值算子 $A: E\to 2^E$,若对任意的 $x\leq y$, $x,y\in E$ 有 $\forall$ u$\in Ax$, $\exists$ v$\in Ay$,使得 $u\leq v$,则称 A 为集值增算子.若对任意的 $x\geq y$, $x,y\in E$ 有 $\forall$ u$\in Ax$ $\exists$ v$\in Ay$,使得 $u\geq v$,则称 A 为集值拟增算子(见文[1,2]).

集合 $B_1, B_2\subset E_1$,若 $\forall$ u$\in B_1$, $\exists$ v$\in B_2$,使得 $u\leq v$ 成立,则记 $B_1\leq B_2$.若 $\forall$ v$\in B_2$, $\exists$ u$\in B_1$,使得 $u\leq v$ 成立,则记 $B_1\leq_2 B_2$.

定义 1 集值算子 $A: E\to 2^E$,若存在 $u_0\in E$,使得 $\{u_D\}\leq 1Au_0$,则称 u_0 为算子 A 的一个下解.若存在 $u_0\in E$,使得 $Au_0\leq 2\{u_0\}$,则称 v_0 为算子 A 的一个上解.

定理 1 设 E 为一实 Banach 空间,P 为 E 中的正规锥,集值算子 A:E$\to 2^{\mathrm{E}}$,若下列条件满足

(i)算子 A 在 E 中有一个下解,即存在 $x_0\in E$,使得 $\{x_0\}\leq_1 Ax_0$,

(ii)存在常数 $M\geq 0$ 及线性有界正算子 $L: E\to E$,且谱半径 $r(L)<1$,使得对任意的 $x\leq y$, $x,y\in E$ 有 $\forall$ u$\in Ax$, $\exists$ v$\in Ay$, $M(x-y)\leq v-u\leq L(y-x)$, (1)

且对任意的 $x\in E$, $Ax+Mx$ 是闭的.

则存在 $x^*\in E$ 满足 $x^*\in Ax^*$,即 x^* 为 A 的不动点.

证明 令 $Bx=\frac{1}{1+M}(Ax+Mx)$, $\forall$ x$\in E$.则集值算子 $B: E\to 2^E$,由(ii)知,对任意的 $x\leq y$, $x,y\in E$ 有,

$$\forall \mathrm{u}\in Ax,\ \exists \mathrm{v}\in Ay,\ M(x-y)\leq v-u\leq L(y-x)$$

即 $\forall$ u$\in Ax$, $\exists$ v$\in Ay$ 满足

$$\theta\leq(v-u)+M(y-x)=(v+My)-(u+Mx)$$
$$\leq L(y-x)+M(y-x)=(L+MI)(y-x)$$

显然,对任意的 $x,y\in E$,若 $u\in Ax$, $v\in Ay$,则有 $u+Mx\in(Ax+Mx)$, $v+My\in(Ay+My)$.

从而, $\forall$ u$+Mx\in(Ax+Mx)$, $\exists$ v$+My\in(Ay+My)$使得

收稿日期:2006-04-25

作者简介:李志龙(1977-),男,江西吉安人,副教授,博士.研究方向:非线性泛函分析.

$$\theta \le \frac{1}{1+M}(v+My)-\frac{1}{1+M}(U+M_x)$$
$$=\frac{1}{1+M}(L+MI)(y-x)$$

为方便起见,仍记 $\frac{u+Mx}{1+M}$,$\frac{v+My}{1+M}$ 分别为 u,v.因此,$\forall u\in Bx$,$\exists v\in By$ 满足

$$\forall u\in Bx,\exists v\in By,\theta\le v-u\le H(y-x).\quad(2)$$

也即 $B:E\to 2^E$ 是集值增算子,其中线性有界正算子 $H=\frac{1}{1+M}(L+MI)$,I 为恒等算子.易知,A 的不动点必定是 B 的不动点;反过来,B 的不动点也必定是 A 的不动点.

下面我们证明 B 在 E 中有不动点.

因为谱半径 $r(L)<1$,取 α 满足 $r(L)<\alpha<1$,由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|H^n\|^{\frac{1}{n}}=r(H)\le\frac{1}{1+M}(r(L)+M)<\frac{\alpha+M}{1+M}\equiv\beta<1$,可知,存在自然数 k,使得

$$\|H^n\|<\beta^n,n\ge k\quad(3)$$

由(i)知,$\{x_0\}\le_1 Bx_0$,再由算子 B 的增性,我们可以找到 $x_1\in Bx_0$ 使得 $x_0\le x_1$.由(2)式,可以选取 $x_2\in Bx_1$ 使得

$$x_1\le x_2,\theta\le x_2-x_1\le H(x_1-x_0).$$

再由(2)式,可以选取 $x_3\in Bx_2$ 使得

$$x_2\le x_3,\theta\le x_3-x_2\le H^2(x_1-x_0).$$

继续上述的选取过程,我们可以构造一个增序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}\in Bx_n\quad \theta\le x_{n+1}-x_n\le H^n(x_1-x_0),n=1,2,3,\cdots\quad(4)$$

由锥的正规性和(4)式,有 $\|x_{n+1}-x_n\|\le N\cdot\|H^n\|\cdot\|x_1-x_0\|$,$n=1,2,3,\cdots$.其中 N 为正规常数.由(3)式知,$\|x_{n+1}-x_n\|\le N\beta^n\|(x_1-x_0)\|$,$n\ge k$,故 $(x_n\}$ 为基本例,所以 $\{x_n\}$ 收敛.令 $x_n\to x^*$,由 $\{x_n\}$ 的增性,有 $x_n\le x^*$,$(n=1,2,3,...)$.由(2)式,可选取 $y_n\in Bx^*$,使得 $\|y_n-x_n\|\le N\|H\|\ \|x^*-x_{n-1}\|$.显然 $\{y_n\}$ 也收剑到 x^*,由假设(ii)知,Bx^* 闭,从而 $x^*\in Bx^*$,证完.

定理2　设 E 为一实 Banach 空间,P 为 E 中的正规锥,集值算子 $A:E\to 2^E$.若下列条件满足

(Ⅲ)算子 A 在 E 中有一个下解,即存在 $x_0\in E$,使得 $\{x_0\}\le_1 Ax_0$.

(Ⅳ)存在线性有界正算子 $L:E\to E$,且 $2r(L)\cdot r((I+L)^{-1})<1$,使得对任意的 $x\le y,x,y\in E$ 有 $\forall u\in Ax,\exists v\in Ay,-L(y-x)\le v-u\le L(y-x)$.且对任意的 $x\in E$,$Ax+Lx$ 是闭的.

则存在 $x^*\in E$ 满足 $x^*\in Ax^*$,即 x^* 为 A 的不动点.

证明　与定理1的证明类似,令 $Bx=\{z=(I+L)^{-1}(y+Lx),y\in Ax\}$,$\forall x\in E$,其中 I 为恒等算子,为了方便记 $Bx=(I+L)^{-1}(Ax+Lx)$,$\forall x\in E$.由(Ⅳ)知,对任意的 $x\le y,x,y\in E$ 有,

$$\forall u\in Bx,\exists v\in By,\theta\le v-u\le H(y-x).$$

也即:$B:E\to 2^E$ 是集值增算子,其中线性有界正算子 $H=(I+L)^{-1}\cdot 2Lx$.

我们只需验证:对任意的 xEE,Bx 为 E 中的闭集,事实上,对 Bx 中的任意序列 $\{Z_n\}$,若 $Z_n\to z^*(n\to\infty)$,则有 $(I+L)(Z_n)\in Ax+Lx$,且 $(I+L)(z_n)\to(I+L)(z^*)(n\to\infty)$,由 $Ax+Lx$ 的闭性知,$(I+L)(z^*)\in Ax+Lx$,即存在某个 $y\in Ax$ 使得 $(I+L)(z^*)=y+Lx$.从而有 $z^*=(I+L)^{-1}(y+Lx)$,即 $z^*\in Bx$,因此 Bx 为 E 中的闭集.证毕.

将定理1,2中的下解条件换成上解条件,类似于定理1,2的证明可知,下面的结论成立.不同之处在于我们将算子 A 的不动点问题转化成集值拟增算子的不动点问题.

定理3　设 E 为一实 Banach 空间,P 为 E 中的正规锥,集值算子 $A:E\to 2^E$.若下列条件满足

(Ⅰ)′算子 A 在 E 中有一个上解,即存在 $x_0\in E$,使得 $Ax_0\le_2\{x_0\}$,

(Ⅱ)′存在常数 $M\ge 0$ 及线性有界正算子 $L:E\to E$,且谱半径 $r(L)<1$,使得对任意的 $x\le y,x,y\in E$ 有

$$\forall v\in Ay,\exists u\in Ax,-M(y-x)\le u-v\le L(y-x),$$

且对任意的 $x\in E$,$Ax+Mx$ 是闭的.

则存在 $x^*\in E$ 满足 $x^*\in Ax^*$,即 x^* 为 A 的不动点.

定理4　设 E 为一实 Banach 空间,P 为 E 中的正规锥,集值算子 $A:E\to 2^E$.若下列条件满足(Ⅲ)′算子 A 在 E 中有一个上解,即存在 $x_0\in E$,使得 $Ax_0\le 2\{x_0\}$,

(Ⅳ)′存在线性有界正算子 $L:E\to E$,且 $2r(L)\cdot r((I+L)^{-1})<1$,使得对任意的 $x\le y,x,y\in E$ 有

$$\forall v\in Ay,\exists u\in Ax,-L(y-x)\le u-v\le L(y-x),$$

且对任意的 $x\in E$,$Ax+Lx$ 是闭的.

则存在 $x^*\in E$ 满足 $x^*\in Ax^*$,即 x^* 为 A 的不动点.

注1　定理1—4的结论同样适用于单值算子且条件更为简化,若 A 为单值算子则条件 $Ax+Mx$

和 $Ax+Lx$ 的闭性自动满足．事实上，当 A 为单值算子时，本文结论仍是新的，定理 1—4 只要求了算子存在一个上解或下解且条件(Ⅱ)，(Ⅳ)，(Ⅳ)′，(Ⅲ)′比一般文献中使用的 *Lipschilz* 条件更为广泛，本文的结果推广了文[3,5]的相应结果．

参考文献：

[1] 郭大钧．非线性泛函分析[M]．济南：山东科学技术出版社(第二版)，2002．

[2] 郭大钧．非线性分析中的半序方法[M]．济南：山东科学技术出版社，2000．

[3] 李志龙．一类集值算子的不动点定理[J]．江西师范大学学报，2000，24(2)：122—125．

[4] 孙经先．不连续的增算子不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用[J]．数学学报，1988，31：101—107．

[5] 张克梅．集值算子的最小，最大拟不动点对的存在定理[J]．曲阜师范大学学报，1999，(1)：13—16．

Fixed Points of a Class of Set-valued Operators

LI Zhi-long

(School of Informational Management，Jiangxi University of Finance and Economics，Nanchang 330013，China)

Abstract：In this paper，the existence of fixed points of a class of set-valued operators is studied and obtained，also the sequence convergent to the fixed point is given．

Key words：set-valued operators；fixed points．

(上接第 133 页)

ii) $lg(x)>m$．则 $x\in X^mX^+\subseteq AX^+X^+\subseteq AX^+$，即 $X^+=A'\cup AX^+$．由于 A 为 X 上的前缀码，据命题 1 与命题 2，A 为极大前缀码．

基于命题 3，我们可以得到下面结果．

推论 3 如果 A 为 X 上的前缀码并且 $Lg(A)=n$，那么存在 X 上的极大前缀码 M 满足 $A\subseteq M$，$Lg(M)=n$．

证明 我们将证明，$M=A\cup(X^n\setminus AX^+)$是所要求的极大前缀码．因为

$M^c=A^c\cup(X^n\setminus AX^+)^c$，$A\cap(X^n\setminus AX^+)^c=\varnothing$ 且 $(X^n\setminus AX^+)\cap(X^n\setminus AX^+)^c=\varnothing$，所以 $M\cap M^c=\varnothing$，进而，M 为 X 上的前缀码，且 $Lg(M)=n$．另一方面，由于 $MX^+=AX^+\cup(X^n\setminus AX^+)X^+\supseteq AX^+$，有 $X^n\subseteq M\cup MX^+$．再由命题 3，知 M 极大前缀码．

参考文献：

[1] H．J．Shyr．Free monoids and languages [M]．Taiwan：Hon Min Book Company，2001．

[2] Y．B．Cha and H．J．Shyr．Some algebraic properties of prefix codes [J]．Nanta Mathematica，1976，5(2)：143—146．

[3] J．M．Howie．An introduction to semigroup theory [M]．London：Academic Press，1976．

A Note on Prefix Codes

CHEN Hui[1]，LIU Er-gen[2]，GUO Xiao-jiang

(1．Institute of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal Uni．，Nanchang 330022；2．School of Basic Science，East China Jiaotong Uni．，Nanchang 330013，China)

Abstract：The aim of this paper is to study prefix codes．We obtain some properties of prefix codes and especially establish some characterizations of maximal prefix codes．These extend some results of Shyr on prefix codes．

Key words：free monoid；language；prefix code；maximal prefix code