文章编号:1005－0523(2007)04－0133－05

锐角三角形的一个不等式链

刘　健

(华东交通大学 初等数学研究所,江西 南昌 330013)

摘要:应用重要的 $R-r-s$ 方法,证明了有关锐角三角形的中线、高线与旁切圆半径的不等式链:设锐角 ΔABC 的三条中线,三条高线与旁切圆半径分别为 m_a,m_b,m_c;h_a,h_b,h_c 和 r_a,r_b,r_c,则成立不等式:$m_ah_a+m_bh_b+m_ch_c\geqslant w_bw_c+w_cw_a+w_aw_b\geqslant h_ar_a+h_br_b+h_cr_c$.提出并应用计算机验证了三个有关的猜想.

关　键　词:锐角三角形;中线;内角平分线;旁切圆半径;不等式

中图分类号:O178　　　　**文献标识码**:A

1　主要结果

文献[1]中,建立了有关三角形长度元素的一个不等式链,提出了四个有关三角形长度元素的不等式猜想,其中最后一个猜想如下:设锐角 ΔABC 的三条中线、高线与内角平分线分别为 m_a,m_b,m_c;h_a,h_b,h_c 和 w_a,w_b,w_c,则有不等式:

$$m_ah_a+m_bh_b+m_ch_c\geqslant w_bw_c+w_cw_a+w_aw_c, \tag{1}$$

等号仅当 ΔABC 为正三角形时成立.

本文将证明上述不等式,同时把它延拓为下述优美的不等式链:

定理　设锐角三角形 ABC 的三个旁切圆半径为 r_a,r_b,r_c,其余符号同上,则有

$$m_ah_a+m_bh_b+m_ch_c\geqslant w_bw_c+w_cw_a+w_aw_c\geqslant h_ar_a+h_br_b+h_cr_c, \tag{2}$$

等号当且仅当锐角为正三角形时成立.

我们将采用三角形不等式中强有力的 $R-r-s$ 方法来证明上述结论. 以下用 a,b,c,s,Δ 分别表示 ΔABC 的三个边长、半周长与面积,$\sum$表示循环和.

2　几个引理

引理 1　在锐角 ΔABC 中成立半对称不等式:

$$4m_a\geqslant 2h_a+r_b+r_c, \tag{3}$$

等号当且仅当 $b=c$ 时成立.

证　由$\frac{1}{2}ah_a=(s-b)r_b=(s-c)r_c=\Delta$,可知要证的不等式等价于

$$4m_a\geqslant\frac{2a^2-(b-c)^2}{a(s-b)(s-c)}\Delta,$$

两边平方并利用 Heron 公式:

收稿日期:2007－03－20

作者简介:刘健(1963－),男,江西兴国人,助理研究员.

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

可知上式等价于

$$16(s-b)(s-c)a^2m_a^2\geqslant s(s-a)[2a^2-(b-c)^2], \tag{4}$$

两边乘以 4 并利用已知的恒等式：

$$4(am_a)^2=16\Delta^2+(b^2-c^2)^2, \tag{5}$$

可知不等式(4)等价于

$$4a^2[a^2-(b-c)^2][2(b^2+c^2)-a^2]\geqslant[(b+c)^2-a^2][2a^2-(b-c)^2], \tag{6}$$

不难验证恒等式：

$$\begin{aligned}&4a^2[a^2-(b-c)^2][2(b^2+c^2)-a^2]-[(b+c)^2-a^2][2a^2-(b-c)^2]\\&=[3(c+a-b)(a+b-c)a^2+(c^2+a^2-b^2)\cdot(a^2+b^2-c^2)](b-c)^2,\end{aligned} \tag{7}$$

可见不等式(6)对锐角三角形成立，从而不等式(3)得证，且知其等号仅当 $b=c$ 时成立．引理 1 证毕．

引理 2　在任意中有

$$\frac{1}{w_a}+\frac{1}{w_b}+\frac{1}{w_c}\leqslant\frac{1}{2R}+\frac{3}{4r}, \tag{8}$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立．

不等式(8)是作者首先提出的，最先为黎建平证明，见[2]．笔者在最近的文献[3]中也用到它．

引理 3[4]　形如

$$s\geqslant f(R,r), \tag{9}$$

的齐次不等式对锐角 $\triangle ABC$ 成立，当且仅当

$$f(1,2t(1-t))\leqslant 2(1+t)\sqrt{1-t^2}\ (1/2\leqslant t<\sqrt{2}/2), \tag{10}$$

$$f(1,2t(1-t))\leqslant 2+2t(1-t)(\sqrt{2}/2\leqslant t<1). \tag{11}$$

引理 4　在任意 $\triangle ABC$ 中有

$$\left(\frac{1}{w_a}+\frac{1}{w_b}+\frac{1}{w_c}\right)^2\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\frac{1}{4r^2}, \tag{12}$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立．

不等式(12)最初由杨学枝发现并证明，但他给出的证明较为繁锁．本文作者发现了恒等式：

$$\sum\frac{1}{w_a^2}+\frac{2}{w_aw_bw_c}\sum h_a=\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{4r^2}, \tag{13}$$

由此与显然的不等式 $\sum h_a\leqslant\sum w_a$ 可迅速导得不等式(12)．

引理 5　在任意 $\triangle ABC$ 中有

(i) $s^2\geqslant 3(4R+r)r$, (14)

(ii) $s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$, (15)

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立．

上述引理的两个不等式均是已知的重要结果，参见[5]，[6]．

引理 6[4]　在锐角 $\triangle ABC$ 中有

$$s^2\geqslant 4R^2-Rr+13r^2, \tag{16}$$

等号当且仅当锐角 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立．

2　定理的证明

首先，我们来证不等式链(2)的第一个不等式(1)．

根据引理 1，要证不等式(1)只要证：

$$\sum(2h_a+r_b+r_c)h_a\geqslant 4\sum w_bw_c. \tag{17}$$

注意到 $h_a=\dfrac{2r_br_c}{r_b+r_c}$，$\sum r_br_c=s^2$，可知

$$\sum(2h_a+r_b+r_c)h_a=8\Delta^2\sum\frac{1}{a^2}+2s^2,$$

进而利用 $abc=4\Delta R$ 与已知恒等式：

$$\sum b^2c^2=s^4+(2r^2-4Rr)s^2+(4R+r)^2r^2, \tag{18}$$

就得

$$\sum(2h_a+r_b+r_c)h_a=\frac{s^4+2(2R^2-4Rr+r^2)s^2+(4R+r)^2r^2}{2R^2}. \tag{19}$$

由已知的等式：

$$w_aw_bw_c=\frac{16Rr^2s^2}{s^2+2Rr+r^2}, \tag{20}$$

可知引理 2 的不等式(8)等价于

$$\sum w_bw_c\leqslant\frac{4r(3R+2r)s^2}{s^2+2Rr+r^2}, \tag{21}$$

据此及(19)可知，要证不等式(17)只要证：

$$\frac{s^4+2(2R^2-4Rr+r^2)s^2+(4R+r)^2r^2}{2R^2}\geqslant\frac{16r(3R+2r)s^2}{s^2+2Rr+r^2},$$

整理后知上式等价于

$$s^6+(4R^2-6Rr+3r^2)s^4-r(88R^3+60R^2r-4Rr^2-3r^3)s^2+(2R+r)(4R+r)^2r^3\geqslant 0. \tag{22}$$

我们可将这式等价地变形为

$$(s^2+8R^2+10Rr+9r^2)(s^2-2R^2-8Rr-3r^2)^2+4(7R^4+12R^3r+27R^2r^2+40Rr^3+12r^4)s^2-4(8R^6+74R^5r+241R^4r^2+350R^3r^3+301R^2r^4+128Rr^5+20Rr^6)\geqslant 0.$$

可见，要证(22)只要证：

$$(7R^4+12R^3r+27R^2r^2+40Rr^3+12r^4)s^2-(8R^6+74R^5r+241R^4r^2+350R^3r^3+301R^2r^4+128Rr^5+20r^6\geqslant 0. \tag{23}$$

这实为(9)的形式．根据引理 3 下分两种情形完成不等式(23)的证明．

(i) 当 $1/2\leqslant t<\sqrt{2}/2$ 时．

这时要证(23)只要证：

$$4[7+24t(1-t)+108t^2(1-t)^2+320t^3(1-t)^3+192t^4(1-t)^4](1+t)^2(1-t^2)-[8+148t(1-t)+964t^2(1-t)^2+2800t^3(1-t)^3+4816t^4(1-t)^4+4096t^5(1-t)^5+1280t^6(1-t)^6]\geqslant 0,$$

展开后再因式分解，即

$$-4(2t-1)^2(2t^2-1)(64t^8-224t^7+176t^6+112t^5-120t^4-34t^3+2t^2+21t+5)\geqslant 0, \tag{24}$$

注意到在假设条件下有 $2t^2-1<0$，因此要证上式只要证：

$$f(t)\equiv 64t^8-224t^7+176t^6+112t^5-120t^4-34t^3+2t^2+21t+5>0. \tag{25}$$

令 $f'(t)=0$，则有

$$512t^7-1568t^6+1056t^5+560t^4-480t^3-102t^2+4t+21=0,$$

解得五个实根：$t_1\approx-0.581$，$t_2\approx 0.356$，$t_3\approx 0.957$，$t_4\approx 1.143$，$t_5\approx 1.615$．于是易知 $f(t)$ 在区间 (t_2,t_3) 内单调减，从而知 $f(t)$ 在 $(1/2,\sqrt{2}/2)$ 内也是单调减，所以有 $f(t)\geqslant f(\sqrt{2}/2)=2+\sqrt{2}>0$，不等式(25)成立，从而(23)式在上述情况下获证．

(ii) 当 $\sqrt{2}/2\leqslant t<1$ 时．

这时按引理 3 要证(23)只要证：

$$[7+24t(1-t)+108t^2(1-t)^2+320t^3(1-t)^3+192t^4(1-t)^4][2+2t(1-t)]^2-[8+148t(1-t)+964t^2(1-t)^2+2800t^3(1-t)+4816t^4(1-t)^4+4096t^5(1-t)^5+1280t^6(1-t)^6(1-t)^6]\geqslant 0,$$

展开后因式分解即

$$-4(2t^2-1)(2t^2-4t+1)(32t^8-128t^7+144t^6+16t^5-86t^4-4t^3+5t^2+21t+5)\geqslant 0. \tag{26}$$

在假设的条件易知 $2t^2-1\geqslant 0$, $2t^2-4t+1<0$, 因此要证上式只要证:

$$32t^8-128t^7+144t^6+16t^5-86t^4-4t^3+5t^2+21t+5>0, \tag{27}$$

上式即

$$2t^2(t-1)^2(16t^4-32t^3-8t^2+24t+13)-21t(t-1)+5>0,$$

因 $t(t-1)<0$, 要证上式只要证:

$$f(t)\equiv 16t^4-32t^3-8t^2+24t+13>0. \tag{28}$$

应用函数的单调性容易证明:对任意实数 t 有 $f(t)>0$, 从而不等式(26)得证, 此时不等式(23)也得到证明.

综上, 不等式(23)对任意锐角三角形成立. 从而锐角三角形不等式(1)得证.

现在, 我们来证定理的第二个不等式:

$$w_bw_c+w_cw_a+w_aw_c\geqslant h_ar_a+h_br_b+h_cr_c. \tag{29}$$

利用 $abc=4Rrs$. $\sum bc=s^2+4Rr+r^2$ 易得

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\frac{1}{4r^2}=\frac{s^4+(4R^2+8Rr+2r^2)s^2+(4R+r)^2r^2}{16R^2r^2s^2}. \tag{30}$$

由此与前面的等式(20)可知引理 4 的不等式(12)等价于

$$\left(\sum w_bw_c\right)^2\geqslant\frac{16r^2s^2[s^4+(4R^2+8Rr+2r^2)s^2+(4R+r)^2r^2]}{(s^2+2Rr+r^2)^2}$$

另外容易证明等式

$$\sum h_ar_a=\frac{r[s^2+(4R+r)^2]}{2R}. \tag{32}$$

所以要证不等式(29)只要证:

$$\frac{16s^2[s^4+(4R^2+8Rr+2r^2)s^2+(4R+r)^2r^2]}{(s^2+2Rr+r^2)^2}\geqslant\frac{[s^2+(4R+r)^2]^2}{4R^2}, \tag{33}$$

即需证:

$$16s^2R^2[s^4+(4R^2+8Rr+2r^2)s^2+(4R+r)^2r^2]-(s^2+2Rr+r^2)^2[s^2+(4R+r)^2]^2\geqslant 0,$$

展开整理即

$$-s^8+4(8R^2-5Rr-r^2)s^6+2r(64R^3-50R^2r-30Rr^2-3r^3)s^4$$
$$-4r(16R^3+2R^2r+7Rr^2+r^3)(4R+r)^2s^2-(2R+r)^2(4R+r)^4r^2\geqslant 0. \tag{34}$$

两边乘以 $\frac{9}{s^4}$ 然后利用引理 5 的不等式 $s^2\geqslant 3r(4R+r)$ 可知, 要证(34)只要证:

$$-9s^4+36(8R^2-5Rr-r^2)s^2+18r(64R^3-50R^2r-30Rr^2-3r^3)-12(4R+r)(16R^3+2R^2r+7Rr^2+r^3)-(2R+r)^2(4R+r)^2\geqslant 0,$$

即

$$-9s^4+3(96R^2-60Rr-12r^2)s^2-832R^4+768R^3r-1312R^2r^2-684Rr^3-67r^4\geqslant 0, \tag{35}$$

经过分析, 我们将上式等价变形为

$$(s^2-4R^2+Rr-13r^2)(252R^2-216Rr-63r^2)+(R-2r)(176R^3+4R^2r+1936Rr^2+443r^3)+9s^2(4R^2+4Rr+3r^2-s^2)\geqslant 0.$$

由 Euler 不等式 $R\geqslant 2r$ 与引理 5 的 Gerretsen 不等式 $s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$ 以及引理 6 陈胜利的不等式(16)即可知上式成立, 从而不等式(29)得证. 至此, 我们完成了定理的证明.

3　三个猜想

考虑不等式(1)的指数推广, 应用计算机进行验证后, 我们提出以下

猜想 1　设 $0.675\leqslant k\leqslant 14.7$, 则在锐 ΔABC 角中有

$$(m_ah_a)^k+(m_bh_b)^k+(m_ch_c)^k\geqslant(w_bw_c)^k+(w_cw_a)^k+(w_aw_c)^k. \tag{37}$$

另一方面，我们猜测不等式(1)可以推广为涉及一个动点的情形：

猜想 2　对锐角 ΔABC 与任意一点 P 有

$$h_aPA+h_bPB+h_cPC\geqslant\frac{2}{3}(w_bw_c+w_cw_a+w_aw_b). \tag{38}$$

显然，令 P 为锐角 ΔABC 的重心，由上式就可得到不等式(1).

由不等式(38)联想到作者发现的不等式(参见[1])：

$$(w_ar_a)^k+(w_br_b)^k+(w_cr_c)^k\geqslant(w_bw_c)^k+(w_cw_a)^k+(w_aw_c)^k. \tag{39}$$

(其中 $k>0$)促使作者提出了以下猜想：

猜想 3　设 $1.005\leqslant k\leqslant 4$，则对锐角 ΔABC 与任意一点 P 有

$$(h_aPA)^k+(h_bPB)^k+(h_cPC)^k\geqslant(\frac{2}{3})^k[(\mathrm{w}_ar_a)^k+(w_br_b)^k+(w_cr_c)^k]. \tag{40}$$

证明含有给定区间指数的三角形不等式(尤其是动点类的)往往是很困难的，目前极及见到这类文献.因此，若能证明 $K=2,3,4$ 时不等式(40)成立也是有意义的.

参考文献：

[1] 刘　健，褚小光.三角形长度长度的一个不等式链[A].见《不等式研究》[C].拉萨：西藏人发出版社，2000.

[2] 黎建平.一个猜想的证明[J].湖南数学通讯，1995，(2)：39－40.

[3] 刘　健.一个角平分线不等式猜想的证明[J].华东交通大学学报，2007，24(1)：142－144.

[4] 陈胜利.关于 R，r 与 s 的锐角三角形不等式[A].见《几何不等式在中国》[C].南京：江苏教育出版社，1996.

[5] O.Bottema(荷兰)等著，单　墫译.几何不等式[M].北京大学出版社，1991.

[6] D.S.Mitrinovic，J.E.Pecaric and V.Volenec，Recent Asvances in Geometric Inequalities[M].Kluwer Academic Publishers，1989.

An Inequality Chain for Acute Triangle

LIU Jian

(East China Jiaotong University，Nanchang 330013，China)

Abstract：The important method of $R-r-s$ is used to prove the inequality chain for the medians altitudes and radii of exinscribed circles of a triangle：Let m_a，m_b，m_c denote the medians of the triangle ABC；the altitudes h_a，h_b，h_c；the radii of exinscribed excircles r_a，r_b，r_c；then holds $m_ah_a+m_bh_h+m_ch_c\geqslant w_bw_c+w_cw_a+w_cw_a\geqslant h_ar_a+h_br_b+h_cr$. Finally，three relevant conjectures are proposed and verified with the computer.

Key words：acute triangle；median，altitude；radius of exinscribed circles；inequality