文章编号:1005－0523(2007)04－0155－03

模糊理想与富足半群

李春华

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:利用 Fountain 在文[1]中定义的半群 S 上的 Green＊－关系 L^*,R^* 及 Lawson 在文[3]中关于富足半群上的自然偏序理论研究了富足半群上的模糊理想,得到了富足半群上模糊理想的一些性质. 在此基础上,给出了富足半群的局部富足子半群的另类刻画. 最后进一步给出了局部超富足半群的刻画.

关　键　词:模糊集;富足半群;自然偏序;模糊理想

中图分类号:O152.7　　　　**文献标识码**:A

1　预备知识

本文出现的记号和术语,若未加说明,均参见文献[1－3,5－7].

Fountain 在文[1]中定义了半群 S 上的等价关系 L^*,S 的元素 a,b 符合关系 L^* 当且仅当($\forall$ x,y$\in S^1$)($ax=ay\Leftrightarrow bx=by$).对偶地定义 R^*.而 H^* 是 S 的 $L^*\cap R^*$.

引理 1.1[2]　令 S 为半群,a,b,$e=e^2\in S$,则以下各款等价:

(1) $aL^*e(aR^*e)$;

(2) $a=ae(a=ea)$且$\forall$ x,y$\in S^1$,$ax=ay\Rightarrow ex=ey(xa=ya\Rightarrow xe=ye)$.

众所周知,L^*为 S 上的右同余,R^*为 S 上的左同余,一般地,$L\subseteq L^*$且 $R\subseteq R^*$.但当 a,b 为正则元时,$aL^*b(aR^*b)$当且仅当 $aLb(aRb)$.为方便记,用 $L_a{}^*$表示含 a 的L^*一类,用 R_a^* 表示含 a 的 R^*一类.$E(T)$表示 T 中的幂等元集.记 a^+为 $E(R_a^*)$中元,a^*为 $E(L_a^*)$中元,a^0 为 $E(H_a^*)$中元.

半群 S 称为左富足的,如果它的所有 R^*–类都含幂等元.对偶地可定义右富足半群.半群 S 称为富足的,如果它既是左富足的又是右富足的.富足半群 S 称为超富足的,如果它的所有的 H^*一类都含幂等元.半群 S 称为局部 P 半群,如果对任意 $e\in E(S)$,eSe 具有性质 P 的半群.显然,富足半群为局部富足半群且对富足半群 S 中任意元素 a,恒有 $a=a^+a=aa^*$.

Lawson 在文[3]中把正则半群中的自然偏序推广到了富足半群,证明了富足半群 S 上如下定义的关系“$\leqslant$”是偏序:$a\leqslant b\Leftrightarrow\exists$ e,f$\in E(S)$,$a=eb=bf$.自然偏序是半群理论中的一个重要概念,国内外许多学者对它进行了卓有成效的研究([3,4,8]).

引理 1.2[3]　令 S 为富足半群,x,a,$b\in S$,则 $L_{xa}^*\leqslant L_a^*$,$R_{ax}^*\leqslant R_a^*$.

半群 S 的子集A 称为S 的序理想,如果 $x\leqslant a(\forall$ a$\in A$,$x\in S)\Rightarrow x\in A$.

设 X 是一个非空集合,称映射f:$X\rightarrow[0,1]$为 X 的一个模糊子集.对任意 x$\in X$,称$f(x)$为 x 对f 的隶属度.半群 S 的模糊子集f 称为S 的模糊子半群,如果$\forall$ a,b$\in S$,$f(ab)\geqslant f(a)\wedge f(b)$;$f$ 称为S 的模糊左理想(模糊右理想),如果$\forall$ a,b$\in S$,$f(ab)\geqslant f(b)$,($f(ab)\geqslant f(a)$);f 称为S 的模糊理想,如果f 既是S 的模糊左

收稿日期:2006－12－16

基金项目:华东交通大学科研基金资助项目.

作者简介:李春华(1973－),男,江西宜丰人,华东交通大学讲师,硕士,主要从事半群代数理论的研究.

理想又是 S 的模糊右理想.

引理 1.3[6] 令 S 为半群, $a,b\in S$, f 为 S 的模糊右理想,则以下各款等价:

(1) $R_a\leqslant R_b(aRb)$;(2) $f(a)\geqslant f(b)(f(a)=f(b))$.

2 主要结果

命题 2.1 令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想,则 $\forall\, a,b\in S$,

$aR^*b\Rightarrow f(a^+)=f(b^+)$.

证明 令 $a,b\in S$, aR^*b,由引理 1.1, $a^+=b^+a^+$, $b^+a^+b^+$. 又 f 为 S 的模糊右理想,故 $f(a^+)=f(b^+a^+)\geqslant f(b^+)=f(a^+b^+)\geqslant f(a^+)$.

定理 2.2 令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想且 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则

$aR^*b\Leftrightarrow f(a)=f(b)(\forall\, a,b\in S)$.

证明 令 $a,b\in S$, aR^*b,则由命题 2.1, $f(a^+)=f(b^+)$. 又 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)$,故 $f(a)=f(a^+)=f(b^+)=f(b)$. 反之,令 $a,b\in S$,且满足 $f(a)=f(b)$. 因 f 为 S 的模糊右理想,故由引理 1.3, aRb. 而 $R\subseteq R^*$. 故 aR^*b.

基于以上事实,下列结论是显然的确.

推论 2.3 令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想且 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则 f 在 S 的 R^* 一类上是一常值函数.

证明 可由定理 2.2 直接推得.

推论 2.4 令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想且 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则以下各款成立:

(1) $f(a)=f(b)\Rightarrow f(ca)=f(cb)(\forall\, a,b,c\in S)$;

(2) $f(ab)=f(ab^+)$, $f(a^+b)=f(a^+b^+)(\forall\, a,b\in S)$;

(3) 若 S 为超富足半群,则 $f(a)=f(a^2)(\forall\, a\in S)$.

证明 (1)令 $a,b\in S$, $f(a)=f(b)$,则由定理 2.2, aR^*b. 又 R^* 为 S 上的左同余. 故 $\forall\, c\in S$, caR^*cb. 于是由定理 2.2, $f(ca)=f(cb)$. (2)令 $b\in S$,则 bR^*b^+. 又 R^* 为 S 上的左同余. 故 $\forall\, a\in S$, abR^*ab^+. 于是由定理 2.2, $f(ab)=f(ab^+)$,类似地, $f(a^+b)=f(a^+b^+)$. (3)令 S 为超富足半群,则 $\forall\, a\in S$,有 $a^0\in E(H_a^*)$. 于是, aR^*a^0. 又 R^* 为 S 上的左同余. 故 $a^2R^*aa^0=a$. 因此由定理 2.2, $f(a)=f(a^2)$.

定理 2.5 令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊子集且 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则 f 为 S 的模糊右理想当且仅当 $\forall\, x,y\in S$, $R_x^*\leqslant R_y^*\Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$.

证明 先证必要性. 令 $x,y\in S$ 且满足 $R_x^*\leqslant R_y^*$,则 $R_{x^+}^*\leqslant R_{y^+}^*$. 又 x^+, y^+ 均为正则元,故有 $R_{x^+}\leqslant R_{y^+}$. 于是存在 $m\in S$,使得 $x^+=y^+m$. 又 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)$ 且 f 为 S 的模糊右理想,故 $f(x)=f(x^+)=f(y^+m)\geqslant f(y^+)=f(y)$.

下证充分性. 令 $x,y\in S$,则由引理 1.2, $R_{xy}^*\leqslant R_x^*$. 故由题设知 $f(xy)\geqslant f(x)$. 因此 f 为 S 的模糊右理想. 至此完成定理证明.

定理 2.6 令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊右理想且 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则

$f(a)\geqslant f(b)\Leftrightarrow R_a^*\leqslant R_b^*(\forall\, a,b\in S)$.

证明 先证必要性. 令 $a,b\in S$ 且满足 $f(a)\geqslant f(b)$,则 $f(a^+)\geqslant f(b^+)$. 于是,由引理 1.3, $R_{a^+}\leqslant R_{b^+}$. 又 a^+, b^+ 均为正则元. 故 $R_{a^+}^*\leqslant R_{b^+}^*$. 即 $R_a^*\leqslant R_b^*$. 充分性可由定理 2.5 直接推得.

定理 2.7 令 S 为富足半群, f 为 S 的模糊子集. 按如下定义 S 的子集: $[a]=\{x\mid f(x)\geqslant f(a)(x,a\in S)\}$,则以下各款成立:

(1) 若 f 为 S 的模糊右(左)理想,则[a]为 S 的右(左)理想;

(2) 若 f 为 S 的模糊右(左)理想,则[a]为 S 的序理想;

(3) 若 f 为 S 的模糊右理想且 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)$,则[a]为 S 的左富足子半群且满足 $[a]=[a^+]$;

(4) 若 f 为 S 的模糊左理想且 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^*)$,则[a]}为 S 的右富足子半群且满足 $[a]=[a^*]$;

(5) 若 f 为 S 的模糊理想且 $\forall\, x\in S$, $f(x)=f(x^+)=f(x^*)$,则 $[e](\forall\, e\in E(S))$ 为 S 的局部富足子半

群.反之,S 的每个局部富足子半群可这样构作;

(6) 若 f 为 S 的模糊理想且 $\forall x\in S, f(x)=f(x^+)=f(x^*)$,则$[a]$为 S 的局部富足子半群.

证明 (1) 令 f 为 S 的模糊右理想,$x\in[a]$, $y\in S$,则 $f(xy)\geqslant f(x)\geqslant f(a)$. 即 $xy\in[a]$. 因此$[a]$为 S 的右理想.对偶地,若 f 为 S 的模糊左理想,则$[a]$为 S 的左理想.

(2) 令 f 为 S 的模糊右理想,$x\in[a]$, $y\in S$ 且 $y\leqslant x$,则 $\exists e\in E(S)$,使得 $y=xe$. 于是 $f(y)=f(xe)\geqslant f(x)\geqslant f(a)$. 即 $y\in[a]$. 因此$[a]$为 S 的序理想.对偶地,若 f 为 S 的模糊左理想,则$[a]$为 S 的序理想.

(3) 令 $x, y\in[a]$,则 $f(x)\geqslant f(a)$, $f(y)\geqslant f(a)$. 又 f 为 S 的模糊右理想,故 $f(xy)\geqslant f(x)\geqslant f(a)$. 即 $xy\in[a]$. 因此$[a]$为 S 的子半群.下证$[a]$的每个 R^* 类均含幂等元.事实上,因 S 为富足半群,故 $\forall x\in[a]$,有 $xR^*(S)x^+\in E(S)$. 又由题设知 $f(x)=f(x^+)$. 于是 $f(x^+)=f(x)\geqslant f(a)$. 即 $x^+\in[a]$. 因此,$xR^*([a])x^+\in E([a])$. 即$[a]=[a^+]$.

(4) 可由(3)对偶地证得.

(5) 令 $e\in E(S)$,则由(3),(4)知,$[e]$为 S 的富足子半群.下证$[e]=eSe$. 事实上,$\forall x\in[e]$,有 $f(x)\geqslant f(e)$. 于是,由定理2.6及其对偶结论,可得 $R_x^*\leqslant R_e^*$, $L_x^*\leqslant L_e^*$. 即 $R_{x^+}^*\leqslant R_e^*$, $L_{x^*}^*\leqslant L_e^*$. 又 x^+, x^*, e 均为正则元,故 $R_{x^+}\leqslant R_e$, $L_{x^*}\leqslant L_e$. 于是,$\exists m, n\in S$,使得 $x^+=em$, $x^*=ne$. 进而,$x=x^+xx^*=(em)x(ne)=e(mxn)e\in eSe$. 即$[e]\subseteq eSe$. 反之,$\forall x\in eSe$, $\exists y\in S$,使得 $x=eye$. 又 f 为 S 的模糊理想,故 $f(x)=f(eye)\geqslant f(ey)\geqslant f(e)$. 即 $x\in[a]$. 反包含成立.即$[e]=eSe$. 因此,$[e]$为 S 的局部富足子半群.反之,由上述证明过程可知,S 的每个局部富足子半群可这样构作.

(6) 由(3),(4)知,$[a]=[a^+]=[a^*]$. 又由(5)知,$[a^+]$,$[a^*]$均为 S 的局部富足子半群.因此,$[a]$为 S 的局部富足子半群.至此完成定理证明.

推论2.8 令 S 为超富足半群,f 为 S 的模糊理想,且 $\forall x\in S, f(x)=f(x^0)$,则 $[a]=\{x\mid f(x)\geqslant f(a)\ (x, a\in S)\}$ 为 S 的局部超富足子半群.反之,S 的每个局部超富足子半群可这样构作.

证明 可由定理2.7推得.

参考文献:

[1] Fountain J B. Abundant semigroups[J]. Proc. London Math. Soc. 1982,(44):103-129.

[2] El-Qalliali A and Fountain J B. Idempotent-connected abundant semigroups[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1981,(91):79-90.

[3] Lawson M V. The natural partial order on an abundant semigroup[J]. Proceedings of the Edinburg. Math. Soc. 1987,(30):169-186.

[4] Guo X J, Luo Y F. The Natural Partial Orders on Abundant Semigroups[J]. Advances in Mathematics, 2005(3):297-308.

[5] Petrich M. Completely regular semigroups[M]. New York:Jhon Wiley&Sons Inc, 1999.

[6] John N. Mordeson, Davender S. Malik and Nobuaki Kuroki, Fuzzy semigroups[M]. Springer-verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.

[7] Xie X Y. Fuzzy ideal extensions in semigroups[J]. Kyungpook Math. J., 2002,(42):39-49.

[8] 李春华,黄华伟,等.富足半群上的自然偏序[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2004,28(1):24-26.

Fuzzy Ideals and Abundant Semigroups

LI Chun-hua

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract:In this paper, first, we study fuzzy ideals on abundant semigroups by using Green *-relations L*, R* on semigroups defined by Fountain in [1] and the natural partial order theory on abundant semigroups introduced by Lawson in [3], and give some properties of fuzzy ideals on such semigroups. On this base, we give another structure of locally abundant subsemigroups to an abundant semigroup. Furthermore, we give a structure of locally superabundants.

Key words:fuzzy set; abundant semigroup; natural partial order; fuzzy ideal