文章编号:1005－0523(2007)05－0151－02

完全图的路分解与因子对称群

曾 伟

(华东交通大学 基础学院 数学系,江西 南昌 330013)

摘要:F·Harary 在[1]中提出如下一个未解决问题:那些有限置换群是完全图同构分解的因子对称群?本文证明了偶数阶完全图的路分解的因子对称群是循环群.

关 键 词:完全图;对称群;因子分解

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

若 $G_i(i=1,2,\cdots,n)$是图 G 的生成子图,G_i 与 G_j 同构,当 $i\neq j$ 时 G_i 与 G_j 没有公共边,则称 $G=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$ 是 G 的同构的因子分解.若 $\sigma\in \mathrm{AutG}$(G 的同构群),σ 保持 G 的这个分解,即对于任意一个 G_i 来说,σ 要末是 G_i 的自同构,要末是 G_i 到 G_j 的同构映射,则所有这样的 σ 组成一个群,称为 G 的同构分解的完全对称群,记为 An.若 $\sigma\in An$,则 σ 诱导出集合$\{G1,G2,\cdots,Gn\}$上的一个置换 s,即 $s(G_i)=G_j$,当 σ 是 G_i 到 G_j 的同构映射时,所有这样的 s 组成群称为 G 的同构分解的因子对称群,记为 Bn.若 M 是 n 个元素的集合$\{1,2,\cdots\cdots,n\}$上的置换群且与 A 恒等,则也称 M 是 G 的同构分解的因子对称群.M 与 A 恒等是指:$t\in M$ 的充分必要条件是 $s\in A$,这里 t 与 s 分别如下:

若 $t(i)=j$,则 $s(G_i)=G_j$

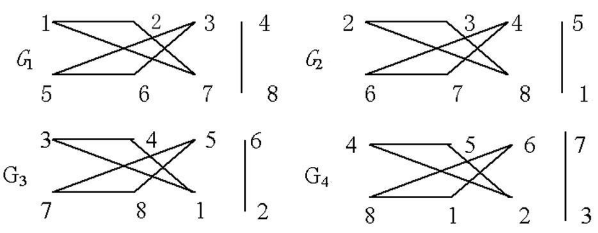
n 个元素的集合上的置换群称为 n 度的置换群.[1]中指出,2 度的单位元素群(即只有一个元素的群),不是完全图的因子对称群,对称群 S_2,S_3,S_4,S_5 是完全图的对称群.[1]中猜想,大多数的置换群(包括 S_n,$n\geqslant 6$)不是完全图的因子对称群.设 $Mi=\{f\mid f(i)=i,f\in M\}$,$I=\{j\mid$ 存在 $f\in M$,使 $f(i)=j\}$,根据有限群论,有如下的引理.

引理 1 $|M|=|Mi|\,|I|$

引理 2 设 $G=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$ 是 G 的一个同构的因子分解,$H=\mathrm{Aut}\,G_1\cap\mathrm{Aut}\,G_2\cap\cdots\cap\mathrm{Aut}\,G_n$,则 H 是 G 的完全对称群 An 的正规子群,且商群 An/H 与 Bn 同构.

证明 映射 $\sigma\to s$ 是 An 到 Bn 上的群同态映射,若 $\tau\in H$,则 $\tau(G_i)=G_i$,$i=1,2,\cdots n$,t 是 Bn 的单位元.反之,若 $t\in H$,则 $\tau\in\mathrm{Aut}\,Gi$ 对某 i,因此 $\tau(G_i)=G_j(i\neq j)$,这说明 H 是此映射的核,因此 H 是 A 的正规子群,A/H 与 Bn 同构.

例 1 图 1 给出 K_8 的一个分解 令 $\sigma=(12345678)$



则 $s=(G_1,G_2,G_3,G_4)$,令 $\tau=(3)(7)(168)(245)$,则 $t=(G_1,G_2,G_3)(G_4)$.B_4 含有 4 阶元素 s 和 3 阶元素 t,因此 B_4 至少有 12 个元素,S_4 只有 24 个元素,S_4的 12 阶子群是 S_4 所有偶置换的群,$B4$ 含有奇置换 s,因此 $A=S_4$.

由 $v_1v_2,v_2v_3,\cdots,v_{n-1}v_n$ 构成的 n 个点的路用$[v_1,v_2,\cdots,v_n]$表示

定理 1 完全图 K_{2n}是 n 条生成路的和:$K_{2n}=$

收稿日期:2007－07－15
作者简介:曾 伟(1978－),女,江西樟树人,助教.

$P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ 证明 K_{2n}的顶点用$\{1,2,\cdots\cdots,2_n\}$表示，P_i 是 K_{2n}的 n 条道路($i=1,2,\cdots,n$)，P_1 为

$P_1=[1,a_1,2,a_2,a_3,\cdots,n,a_n]$，其中 j＋ $a_j=2n+1$；

P_{i+1}是把 P_i 的每个点加 1(mod $2n$)得到的，这是 n 条不相交的路，它含 K_{2n}所有的边.

例如，$n=6$ 时 $P_1,\cdots,P_6$ 如下：

[1,12,2,11,3,10,4,9,5,8,6,7]

[2,1,3,12,4,11,5,10,6,9,7,8]

[3,2,4,1,5,12,6,11,7,10,8,9]

[4,3,5,2,6,1,7,12,8,11,9,10]

[5,4,6,3,7,2,8,1,9,12,10,11]

[6,5,7,4,8,3,9,2,10,1,11,12]

定理 2 K_{2n}的路分解 $K_{2n}=P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ 的完全对称群是 2 面体群$<\sigma,\tau>$，由 $\sigma=(1,2,3,\cdots,2n)$，$\tau=(1,1+n)(2,2+n)\cdots(n,2n)$生成. 因子对称群是循环群$<s>$，$s=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

证明 σ 是 P_i 到 P_{i+1}的同构影射，它诱导出集合$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$上的映射 $s=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$；τ 是 P_i 到 P_i 的同构影射，它诱导出集合$\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$上的恒等映射由引理 1,2，因子对称群是循环群$<s>$.

系 由 $s=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$生成的循环群是完全图同构分解的因子对称群.

参考文献：

[1] F. Harary and R. W. Robinson, Isomorphic factorizations X: Unsolved Problems[J]. J. Graph Theory, 1985, 9(1): 67－86.

[2] F. Harary, Graph theory[M], Addison-Wesley, 1969. 中译本，图论，李慰萱译，上海科学技术出版社，1980.

On the Path factorization of Isomorph in Complete Graph

ZENG Wei

(East China Jiaotong University, Nachang 330013, China)

Abstract: F. Harary[1] posed on an open problem as follows: which finite permutation groups are the factor sysmmetric group of isomorphic partition for complete graph? In this paper we prove that the cyclic group of order n is one of those groups.

Key words: complete graph; symetric group; factorization