第25卷第1期 华 东 交 通 大 学 学 报 Vol. 25 No. 1
2008年2月 Journal of East China Jiaotong University Feb. ,2008

文章编号:1005 – 0523(2008)01 – 0102 – 05

扇与轮联图的全色数

冶建华,马 刚

(西北民族大学 计算机科学与信息工程学院,甘肃 兰州 730030)

摘要: 图的全染色是指对顶点和边同时染色，使得相邻或相关联的元素染不同的颜色，其所用最少染色数称为全色数，记为$\chi_T(G)$. 就扇与轮的联图$F_m \vee W_n$,本文得到了在m和n不同取值情况下的全色数.

关 键 词: 扇轮; 联图; 全色数
中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

继图的点染色、边染色以及组合地图的面染色之后,人们又提出了全染色[1,2]的概念. 1965年,M. Behzad和Vizing独立地提出了著名的全着色猜想[1],围绕这个猜想,人们开展了对图的全染色问题的研究,得出了许多有用的结果(见文献[1,2]),但是完全证实全染色猜想仍是一个远未解决的问题. 本文给出了扇F_m与轮W_n的联图的全色数.

定义1[3,4] 对图$G(V,E)$的映射$f: E \xrightarrow{f} \{1,2,\cdots,k\}$,若满足任意相邻的边$e,e'$有$f(e)f\neq(e')$,则称$f$为$G$的一个$k$ – 正常边染色法,简记作k – PEC of G,而$\chi'(G) = \min\{k|k - \text{PEC of } G\}$称为$G$的边色数.

定义2[1] 对图$G(V,E)$的映射$f: \{V,E\} \xrightarrow{f} \{1,2,\cdots,k\}$,若满足下列条件:

1) $\forall u,v \in V, uv \in E$,且$u \neq v$,有$f(u) \neq f(v)$;

2) $\forall u, uw \in E, v \neq w$,有$f(uv) \neq f(uw)$;

3) $\forall u,v \in V, uv \in E$,且$u \neq v$,有$f(u) \neq f(uv)$, $f(v) \neq f(uv)$.

则称f为G的一个k – 全染色法,简记作k – TC of G,而$\chi_T^{\cdot}(G) = \min\{k|k - \text{TC of } G\}$称为$G$的全色数. 显然有$\chi_T(G) \geqslant \Delta(G) + 1$,其中$\Delta(G)$表示$G$的最大度数.

定义3[3] 设图G与H有: $V(G) \cap V(H) = \phi$; $E(G) \cap E(H) = \phi$. 若$G \vee H$满足:

$V(G \vee H) = V(G) \cup V(H)$; $E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv|u \in V(G), v \in V(H)\}$.

则称$G \vee H$为G与H的联图.

猜想1[1-2] 对简单图G,有$\chi_T(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.

引理1[1] 对n阶完全图K_n,有$\chi_T(K_n) = \begin{cases} n, & n \equiv 1 \pmod 2; \\ n+1, & n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$

引理2[1] 若H是G的子图,则有$\chi_T(H) \leqslant \chi_T(G)$.

引理3[4] 对简单图G,若$G[V_\Delta]$无圈,则有$\chi'(G) = \Delta(G)$.

其中$V_\Delta = \{v|d(v) = \Delta, v \in V(G)\}$, $E(G[V_\Delta]) = \{uv|d(u) = d(v) = \Delta, uv = \in E(G)\}$.

文中未加述及的术语、记号可参见[1,3].

收稿日期: 2007 – 12 – 06
基金项目: 西北民族大学中青年科研基金(X2007 – 012);国家民委科研项目(05XB07)

作者简介: 冶建华(1974 –),男,甘肃临夏人,讲师,主要从事应用数学、图论的研究.

1 主要结论及其证明

在以下讨论中记 $m+1$ 阶扇 $V(F_m)=\{u_i \mid i=0,1,2,\cdots,m\}$;$E(F_m)=\{u_0u_i \mid i=1,2,\cdots,m\}\cup\{u_iu_{i+1} \mid i=1,2,\cdots,m-1\}$. 记 $n+1$ 阶轮 W_n 为:$V(W_n)=\{v_i \mid i=0,1,2,\cdots,n\}$;$E(W_n)=\{v_0v_i \mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{v_iv_{i+1} \mid i=1,2,\cdots,n-1\}\cup\{v_nv_1\}$. 由定义3有下述引理4.

引理4 对任意正整数 m,n,有 $\Delta(F_m\vee W_n)=m+n+1$.

定理1 对任意正整数 n 有 $\chi_T(F_2\vee W_n)=n+4$.

证明 以下分四种情形对本定理予以证明.

情况1 当 $n=3$ 时. 则 $F_2\vee W_3=K_7$,从而由引理1知此时结论成立.

情况2 当 $n=4$ 时. 由定义2和引理4知 $\chi_T(F_2\vee W_4)\geqslant 8$,为了证明结论成立,仅需给出 $F_2\vee W_4$ 的一个 $8-\mathrm{TC}$ 法. 令为:

$$f(v_1)=f(v_3)=f(u_0v_0)=f(u_1v_2)=f(u_2v_4)=1;$$
$$f(v_2)=f(v_4)=f(u_0v_1)=f(u_1v_0)=f(u_2v_3)=2;$$
$$f(u_0v_2)=f(u_1v_1)=f(u_2v_0)=f(v_3v_4)=3;f(u_0v_3)=f(u_1v_4)=f(u_2v_1)=f(v_0v_2)=4;$$
$$f(v_0)=f(u_0v_4)=f(u_1v_3)=f(u_2v_2)=5;f(u_0)=f(u_1u_2)=f(v_0v_1)=f(v_2v_3)=6;$$
$$f(u_1)=f(u_0u_2)=f(v_0v_4)=f(v_1v_2)=7;f(u_2)=f(u_0u_1)=f(v_0v_3)=f(v_4v_1)=8.$$

由此可见,f 是 $F_2\vee W_4$ 的 $8-\mathrm{TC}$ 法,所以此时结论成立.

情况3 当时 $n=5$. 由定义2和引理4知 $\chi_T(F_2\vee W_5)\geqslant 9$,又因 $F_2\vee W_5$ 是 K_9 的一个子图,由引理1和引理2知 $\chi_T(F_2\vee W_5)\leqslant\chi_T(K_9)=9$,所以 $\chi_T(F_2\vee W_5)=9$,此时结论成立.

情况4 当 $n=6$ 时. 由定义2和引理4知 $\chi_T(F_2\vee W_n)\geqslant n+4$,为了证明结论成立,仅需证明 $F_2\vee W_n$ 存在一个 $(n+4)-\mathrm{TC}$ 法,设边集 $\mathrm{M}=\{u_0v_0,u_1u_2,u_1v_0,u_0u_2\}$,定义图 G^* 为:

1) $V(G^*)=V(F_2\vee W_n)\cup\{w\}$;

2) $E(G^*)=E(F_2\vee W_n\backslash M)\cup\{wv_0,wu_0,wu_1,wu_2\}\cup\{wv_i \mid i=4,5,\cdots,n\}$.

则 G^* 最大度点的导出图 $G^*[V_\Delta]$ 的边集 $E(G^*[V_\Delta])=\{u_0u_1,v_0u_2\}$,显然无圈,从而由引理3知:

$$\chi'(G^*)=\Delta(G^*)=n+2.$$

令 f_1 为 G^* 的一个 $(n+2)-\mathrm{PEC}$ 法,在 f_1 的基础上对 $F_2\vee W_n$ 作映射 f_2 为:

$$f_2(v_0)=f_1(wv_0);f_2(u_i)=f_1(wv_i),i=0,1,2;f_2(v_i)=f_1(wv_i),i=4,5,\cdots,n.$$

令 f_3 为:$f_3(u_0v_0)=f_3(u_1u_2)=f_3(v_1)=f_3(v_3)=n+3;f_3(u_1v_0)=f_3(u_0u_2)=f_3(v_2)=n+4.$

从而将 f_1,f_2,f_3 合在一起,恰好构成 $F_2\vee W_n$ 的一个 $(n+4)-\mathrm{TC}$ 法,所以此时结论成立.

定理2 当 $m=3$ 时,有 $\chi_T(F_3\vee W_n)=\begin{cases}9,n=3;\\ n+5,n\geqslant 4.\end{cases}$

证明 以下分三种情形对本定理予以证明.

情况1 当 $n=3$ 时,由定义2和引理4知 $\chi_T(F_3\vee W_3)\geqslant 8$;又因 $F_3\vee W_3=K_8-u_1u_3$,则由引理1和引理2知 $\chi_T(F_3\vee W_3)\leqslant\chi_T(K_8)=9$. 若 $\chi_T(F_3\vee W_3)=8$,则除对 u_1 与 u_3 染相同色的这一色至多包含5个元素外,其余每一种色至多包含4个元素,从而8种色至多染33个元素,但 $|V(F_3\vee W_3)|+|E(F_3\vee W_3)|=35$,而这是不可能的,所以 $\chi_T(F_3\vee W_3)=9$,此时结论成立.

情况2 当 $n=4$ 时,$F_3\vee W_4$ 是 K_9 的一个子图,此时同理于定理1情况3的证明.

情况3 当 $n\geqslant 5$ 时,由定义2和引理4知 $\chi_T(F_3\vee W_n)\geqslant n+5$,为了证明结论成立,仅需证明 $F_3\vee W_n$ 存在一个 $(n+5)-\mathrm{TC}$ 法. 设匹配集 $\mathrm{M}=\{u_0u_2,v_0v_1\}$,定义图 G^* 为:

1) $V(G^*)=V(F_3\vee W_n)\cup\{w\}$;

2) $E(G^*)=E(F_3\vee W_n\backslash M)\cup\{wu_0,wu_2\}\cup\{wv_i \mid i=0,1,\cdots,n\}$.

则 G^* 最大度点的导出图 $G^*[V_\Delta]=\{u_0v_0u_2\}$ 是3阶路,从而由引理3知:

$$\chi'(G^*)=\Delta(G^*)=n+4.$$

令 f_1 为 G^* 的一个 $(n+4)-\mathrm{PEC}$ 法,在 f_1 的基础上对 $F_3\vee W_n$ 作映射 f_2 为:

$$f_2(u_0)=f_1(wu_0);f_2(u_2)=f_1(wu_i),i=0,1,2;f_2(v_i)=f_1(wv_i),i=0,1,\cdots,n.$$

令 f_3 为:$f_3(u_0u_2)=f_3(v_0v_1)=f_3(u_1)=f_3(u_3)=n+5.$

从而将 f_1, f_2, f_3 合在一起，恰好构成 $F_3 \vee W_n$ 的一个 $(n+5)$ – TC 法，所以此时结论成立.

定理 3 当 $m \geqslant 4$ 时，有 $\chi_T(F_m \vee W_n) = m+n+2$.

证明 以下分三种情形对本定理予以证明.

情况 1 当 $m=4, n=3$ 时，$F_4 \vee W_3$ 是 K_9 的一个子图，此时同理于定理 1 情况 3 的证明.

情况 2 当 $m \geqslant 5, n=3$ 时，由定义 2 和引理 4 知 $\chi_T(F_m \vee W_3) \geqslant m+5$，为了证明结论成立，仅需证明 $F_m \vee W_3$ 存在一个 $(m+5)$ – TC 法. 令 f 为：

$$f(u_0v_j) = m+j+1, j=0,1,2,3; f(u_iv_j) = i+j, i=1,2,\cdots,m, j=0,1,2,3;$$
$$f(v_0v_j) = m+j+2, j=1,2,3; f(v_1v_2) = f(u_0u_1) = f(u_3) = f(u_5) = m+5;$$
$$f(v_2v_3) = 2; f(v_3v_1) = f(v_2) = 1; f(v_0) = f(u_1u_2) = m+2;$$
$$f(v_1) = f(u_2u_3) = m+4; f(v_3) = 3; f(u_0) = m; f(u_1) = m+1;$$
$$f(u_2) = f(u_4) = m+3; f(u_0u_i) = i-1; i=2,3,\cdots,m;$$
$$f(u_iu_{i+1}) = i-2, i=3,4,\cdots,m; f(u_i) = i-2, i=6,7,\cdots,m (m \geqslant 6 \text{ 时}).$$

可检验知 f 是 $F_m \vee W_3$ 的 $(m+5)$ – TC 法，所以此时结论成立.

情况 3 当 $m \geqslant 4, n \geqslant 4$ 时，由定义 2 和引理 4 知 $\chi_T(F_m \vee W_n) = m+n+2$. 仅需证明 $F_m \vee W_n$ 存在一个 $(m+n+2)$ – TC 法，设匹配集 $M = \{u_0v_0, u_2u_3, v_1v_2, v_3v_4\}$，定义图 G^* 为：

1) $V(G^*) = V(F_m \vee W_n) \cup \{w\}$;

2) $E(G^*) = E(F_m \vee W_n \backslash M) \cup \{wu_0\} \cup \{wu_i \mid i=2,3,\cdots,m\} \cup \{wv_i \mid i=0,1,\cdots,n\}$.

则 G^* 最大度点的导出图 $G^*[V_\Delta] = u_0wv_0$ 是 3 阶路，从而由引理 3 知：

$$\chi'(G^*) = \Delta(G^*) = m+n+1.$$

令 f_1 为 G^* 的一个 $(m+n+1)$ – PEC 法，在 f_1 的基础上对 $F_m \vee W_n$ 作映射 f_2 为：

$$f_2(u_0) = f_1(wu_0); f_2(u_i) = f_1(wu_i), i=2,3,\cdots,m; f_2(v_i) = f_1(wv_i), i=0,1,\cdots,n.$$

令 f_3 为：$f_3(u_0v_0) = f_3(u_2u_3) = f_3(u_1) = m+n+2; f_3(v_1v_2) = f_3(v_3v_4) = m+n+2$.

从而将 f_1, f_2, f_3 合在一起，恰好构成 $F_m \vee W_n$ 的一个 $(m+n+2)$ – TC 法，所以此时结论成立.

由定理 1 – 3 和引理 4 可得下述定理 4.

定理 4 对正整数 m, n，有 $\chi_T(F_m \vee W_n) = \begin{cases} \Delta+2, m=n=3; \\ \Delta+1, \text{其余情况}. \end{cases}$

由此可见，扇与轮的联图 $F_m \vee W_n$ 对全染色猜想成立.

参考文献：

[1] H. P. Yap, Total colorings of graphs [A], Notes in mathematics [M]. Berlin: Springer, 1996.
[2] 张忠辅，王建方，关于图的全着色——一个综述 [J]，数学进展，1992(4): 390 – 397.
[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with applications [M]. Amsterdam: Elsevier, 1976.
[4] 张忠辅，张建勋，第 I 类图的若干充分条件 [J]，数学杂志，1985, 5(2): 161 – 165.
[5] 马刚，刘华，唐国梅，张忠辅，圈和扇的联图的全染色 [J]. 华东交通大学学报，2005, (4): 152 – 154.

On Total – Coloring of $F_m \vee W_n$

YE Jian – hua, MA Gang

(The College of computer science and information engineering, Northwest University for nationalities, Lanzhou 730030, China)

Abstract: A coloring of graph is called total coloring if adjacent or relevant elements (vertices and edges) have different colors, inwhich the required minimum number of colors is called the total chromatic number. named as $\chi_T(G)$. In this paper, we have given the total chromatic number of $F_m \vee W_n$, as far as $F_m \vee W_n$ is concerned.

Key words: fan; wheel; join – graph; total chromatic number

(责任编辑：周尚超)