

文章编号: 1005-0523(2009)01-0091-03

关于图的反减圈控制数

赵金凤, 徐保根, 赵 华, 帅春萍

(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013)

摘要: 设 $G=(V, E)$ 是一个图, C 为 G 的导出圈, 函数 $f: E \rightarrow \{+1, 0, -1\}$, 如果对任意 $e \in E(C)$ 均有 $\sum f(e) \leq 0$ 成立, 则称 f 为图 G 的一个反减圈控制函数, 称 $\gamma'_{mc}(G) = \max \left\{ \sum f(e) \mid f \text{ 为 } G \text{ 的反减圈控制函数, } e \in E(G) \right\}$ 为图 G 的反减圈控制数. 本文给出了图的反减圈控制数的上界和极大平面图及几类特殊图的反减圈控制数.

关 键 词: 反减圈控制函数; 反减圈控制数; 极大平面图

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

本文所指的图均为无向图, 文中未说明的术语和符号同于文献 [1].

设 $G=(V, E)$ 为一个图, 其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$. 若 $S \subseteq V(G)$, 则 $G[S]$ 表示由 S 导出的 G 的导出子图. 若 C 为图 G 中一个长度不小于 4 的圈, u 和 v 为 C 中两个不相邻顶点, 如果 $uv \in E(G)$, 则称 uv 为圈 C 的一条弦. 图 G 的一个圈 C 是无弦当且仅当 $G[V(C)] = C$. G 的一个无弦圈也称为 G 的一个导出圈.

自从第十八届东南组合和图论及计算国际学术大会上 S. T. Hedetniemi 定义了分数控制以来, 图的控制理论研究的内容越来越丰富, 加拿大著名图论专家 E. J. Cockayne^[2] 等人先后引入图的许多不同类型的控制概念及其变化形式. 1998 年美国图论学者 W. T. Haynes 等人出版了两部专著^[3, 4], 较为系统地综述了近期的一些主要研究成果. 然而值得注意的是, 几乎所有的概念和结果都是针对图的点控制而言的, 很少涉及图的边控制问题. 为了更进一步丰富和完善图的控制理论内容, 我们已将点控制概念转向边控制问题, 并获得了初步的研究成果, 如符号边控制^[5]、符号圈控制^[6]和减控制中的减边控制^[7]等, 关于减控制的研究结果还很少. 文^[7, 8]中引入了图的符号圈控制和反符号边控制的概念, 定义如下:

定义 1^[6] 设 $G=(V, E)$ 是一个非空图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{-1, 1\}$ 如果满足 $\sum_{e \in E(C)} f(e) \geq 1$ 对 G 中每一个无弦的圈 C 成立, 则称 f 为图 G 的一个符号圈控制函数. 图 G 的符号圈控制数定义为 $\gamma'_{sc}(G) = \min \left\{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ 为 } G \text{ 的符号圈控制函数} \right\}$.

定义 2^[8] 设 $G=(V, E)$ 是一个图, 函数 $f: E \rightarrow \{+1, -1\}$, 如果对任意 $e \in E(G)$ 均有 $\sum_{e' \in N[e]} f(e') \leq 0$, 则称 f 为 G 的一个反符号边控制函数. 图 G 的反符号边控制数定义为 $\gamma'_s(G) = \max \left\{ \sum_{e \in E} f(e) \mid f \text{ 为 } G \text{ 的反符号边控制函数} \right\}$.

结合符号圈和反符号边控制的概念, 我们很自然地提出反减圈控制的定义.

定义 3 设 $G=(V, E)$ 是一个非空图, 一个函数 $f: E \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ 如果满足 $\sum_{e \in E(C)} f(e) \leq 0$ 对 G 中每一个

收稿日期: 2008-06-19

基金项目: 国家自然科学基金 (10661007) 资助项目; 江西省自然科学基金 (2007GZS0715) 资助项目

作者简介: 赵金凤 (1982-), 女, 河北保定人, 运筹学与控制论硕士研究生.

无弦的圈 C 成立, 则称 f 为图 G 的一个反减圈控制函数. 图 G 的反减圈控制数定义为 $\gamma'_{mc}(G) = \max \left\{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ 为 } G \text{ 的反减圈控制函数} \right\}$.

对于空图 K_n , 定义 $\gamma'_{mc}(K_n) = 0$. 由定义可知, $0 \leq \gamma'_{mc}(G) \leq |E(G)|$ 为反减圈控制数的平凡界限, 且有如下性质:

- (1) 对任意无圈的图 G , 均有 $\gamma'_{mc}(G) = |E(G)|$;
- (2) 对任意两个点不交的图 G_1 和 G_2 , 均有 $\gamma'_{mc}(G_1 \cup G_2) = \gamma'_{mc}(G_1) + \gamma'_{mc}(G_2)$.

下面我们给出反减圈控制数的一个上界和极大平面图及几类特殊图的反减圈控制数.

1 反减圈控制数的上界

定理 1 对于任意 n 阶图 G , 均有 $\gamma'_{mc}(G) \leq n-1$, 当且仅当 G 为树时等号成立.

证明 若 G 中无圈, 则 G 为树或森林, 显然有 $\gamma'_{mc}(G) \leq |E(G)| \leq n-1$.

若 G 中有圈, 则 G 中必有无弦的圈. 假设 G 中 (至多) 共有 t 个边不交的无弦圈, 分别记为 $C^1, C^2, \dots, C^t$.

令 $T = G - \bigcup_{i=1}^t E(C^i)$, 可见 T 为无圈图 (树或森林), 即有 $|E(T)| \leq n-1$.

设 f 为 G 的一个反减圈控制函数且使得 $\gamma'_{mc}(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e)$. 由定义知对于任意一个无弦圈 C^i ($1 \leq i \leq t$), 均有 $\sum_{e \in E(C^i)} f(e) \leq 0$, 从而有

$$\gamma'_{mc}(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e) = \sum_{e \in E(T)} f(e) + \sum_{i=1}^t \sum_{e \in E(C^i)} f(e) \leq n-1.$$

当 G 为 n 阶树时, 定义函数 f 如下: 对任意 $e \in E(G)$, $f(e) = 1$, 不难验证 f 为 G 的一个反减圈控制函数, 又 $\sum_{e \in E(G)} f(e) = n-1$, 故 $\gamma'_{mc}(G) \geq \sum_{e \in E(G)} f(e) = n-1$, 从而有 $\gamma'_{mc}(G) = n-1$. 定理证毕.

引理 1 设整数 $n \geq 3$, 则每个 n 阶极大平面图有 $2n-4$ 个面 (包括外部面).

定理 2 对于任意 n ($n \geq 3$) 阶极大平面图 G 均有 $\gamma'_{mc}(G) = 0$.

证明 将图 G 嵌入平面内, 由引理 1 知, 图 G 共有 $2n-4$ 个面 (包括外部面), 分别记为 $F_1, F_2, \dots, F_{2n-4}$, 用 $C(F_i)$ 表示面 F_i 的边界三角形的三条边集, $1 \leq i \leq 2n-4$. 设 f 为 G 的一个反减圈控制函数且使得 $\gamma'_{mc}(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e)$. 由定义知, 对每个 $C(F_i)$ 均有 $\sum_{e \in C(F_i)} f(e) \leq 0$, 又注意到 $\sum_{e \in C(F_i)} f(e) \leq 0$, 从而 $2\gamma'_{mc}(G) = \sum_{i=1}^{2n-4} \sum_{e \in C(F_i)} f(e) \leq 0$, 即 $\gamma'_{mc}(G) \leq 0$. 又 $\gamma'_{mc}(G) \geq 0$, 从而有 $\gamma'_{mc}(G) = 0$.

2 特殊图的反减圈控制数

定理 3 对任意 n 阶完全图 K_n , 均有 $\gamma'_{mc}(K_n) = 0$.

证明 记 $G = K_n$, 令 f 为 K_n 的一个反减圈控制函数且使得 $\gamma'_{mc}(G) = f(E(G))$.

对任意边 e 所在的导出圈 F_i ($1 \leq i \leq n-2$) 均有 $\sum_{e \in C(F_i)} f(e) \leq 0$, 从而有 $\sum_{j=1}^{n(n-1)/2} \sum_{e \in C(F_j)} f(e) \leq 0$, 等价于 $3(n-2) \sum_{e \in E(G)} f(e) \leq 0$, 即 $\gamma'_{mc}(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e) \leq 0$. 又 $\gamma'_{mc}(G)$ 的一个平凡界限为 $\gamma'_{mc}(G) \geq 0$, 故 $\gamma'_{mc}(G) = 0$.

定理 4 对于任意完全二部图 $K_{m,n}$, 均有 $\gamma'_{mc}(K_{m,n}) = 0$.

证明 记 $K_{m,n} = G = (V, E)$, 令 f 为 $K_{m,n}$ 的一个反减圈控制函数且使得 $\gamma'_{mc}(G) = f(E(G))$. 易知每条边所在的导出圈长均为 4. 对于每一条边 $e \in E(G)$, 均有 $\sum_{e \in C(F_i)} f(e) \leq 0$, 其中 F_i 为边 e 所在的导出圈, $C(F_i)$ 表示导出圈的边集, $1 \leq i \leq (m-1)(n-1)$, 从而 $\sum_{j=1}^{m(n-1)} \sum_{e \in C(F_j)} f(e) \leq 0$, 且等价于 $[m+n-2+(m-1)(n-1)] \sum_{e \in E(G)} f(e) \leq 0$. 因此 $\gamma'_{mc}(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e) \leq 0$. 又 $\gamma'_{mc}(G)$ 的一个平凡界限为 $\gamma'_{mc}(G) \geq 0$, 故 $\gamma'_{mc}(G) = 0$.

定理 5 设 $G = P_m \times C_n$ ($n \geq 3$), 则 $\gamma'_{mc}(G) = 0$.

证明: 记 $G = P_m \times C_n$. 设 f 为 $G = P_m \times C_n$ 的反减圈控制函数且使得 $\gamma'_{mc}(G) = f(E(G))$. 为了方便, 我们记 m 个圈分别为 $C^1, C^2, \dots, C^m$, 圈上的路分别记为 $P^1 = \{e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1\}$, $P^2 = \{e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2\}, \dots, P^{m-1} = \{e_1^{m-1}, e_2^{m-1}, \dots, e_n^{m-1}\}$, $f(C^1) = f(E(C^1))$, $f(P^1) = f(E(P^1))$, $f(P^2) = f(E(P^2))$ 等诸如此类记法.

对于每条边 $e \in E(C^i)$, 其所在的导出圈分别记为 F_i^j , $C(F_i^j)$ 表示对应导出圈的边集, 其中 $i=1, 2, \dots, m-1, j=1, 2, \dots, n$. 由反减圈控制数的定义有 $\sum_{e \in C(F_i^j)} f(e) \leq 0$. 所以当 $e \in E(C^1)$ 时, 有 $f(C^1) + 2f(P^1) + f(C^2) \leq 0$ 成立; 当 $e \in E(C^i)$ 时, 有 $f(C^{i-1}) + 2f(C^i) + f(C^{i+1}) + 2f(P^{i-1}) + 2f(P^i) \leq 0$ 成立, 其中 $i=2, \dots, m-1$; 当 $e \in E(C^m)$ 时, 有 $f(C^{m-1}) + 2f(P^{m-1}) + f(C^m) \leq 0$ 成立.

综合上面的式子有 $2f(C^1) + 4\sum_{i=2}^m f(C^i) + 4\sum_{i=1}^{m-1} f(P^i) \leq 0$. 又 $f(C^i) \leq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$), 从而 $4\gamma'_{mc}(G) = 4\sum_{e \in E(G)} f(e) = 4\sum_{i=1}^m f(C^i) + 4\sum_{i=1}^{m-1} f(P^i) \leq 2f(C^1) + 4\sum_{i=2}^m f(C^i) + 4\sum_{i=1}^{m-1} f(P^i) \leq 0$, 即 $\gamma'_{mc}(G) \leq 0$. 又 $\gamma'_{mc}(G)$ 的一个平凡界限为 $\gamma'_{mc}(G) \geq 0$, 故 $\gamma'_{mc}(G) = 0$.

由以上定理可以直接得到轮图的反减圈控制数:

推论 6 对任意 $n+1$ 阶轮图 $W_{n+1} = C_n + K_1$ ($n \geq 3$), 均有 $\gamma'_{mc}(W_{n+1}) = 0$.

用类似定理 5 的证明方法可得

定理 7 设 $G = C_m \times C_n$ ($m \geq 3, n \geq 3$), 则 $\gamma'_{mc}(G) = 0$.

参考文献:

- [1] Bondy J A and Murty V S R. Graph Theory with Applications[M]. Amsterdam: Elsevier 1976.
- [2] Haynes T W, Hedetniemi S T and Slater P J. Domination in Graphs[M]. New York: Marcel Dekker 1998.
- [3] Zhang Z, Xu Baogen, Li Y and Liu L. A note on the lower bounds of signed domination number of a graph [J]. Discrete Math 1999, (195): 295—298.
- [4] Xu Baogen, Cockayne E J, Haynes T W, Hedetniemi S T and Zhou S. Extremal graphs for inequalities involving domination parameters[J]. Discrete Math 2000, (216): 1—10.
- [5] 徐保根. 关于图的符号边控制数 [J]. 华东交通大学学报, 2003, 20(2): 102—105.
- [6] 徐保根, 周尚超. 图与补图的符号圈控制数 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版), 2006, 30(3): 249—251.
- [7] 徐保根. 关于图的减边控制 [J]. 江西师范大学学报 (自然科学版), 2007, 31(1): 21—24.
- [8] 徐保根. 关于图的反符号边控制 [J]. 华东交通大学学报, 2007, 24(5): 144—147.

On Reverse Minus Cycle Domination Numbers of Graphs

ZHAO Jin-feng, XU Bao-gen, ZHAO Hua, SHUAI Chun-ping

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $G = (V, E)$ be a graph. C is an induced cycle of G . A function $f: E \rightarrow \{+1, 0, -1\}$ is said to be a reverse minus cycle dominating function (RMCDF) of G if $\sum_{e \in C} f(e) \leq 0$ holds for every edge $e \in E(C)$, and $\gamma'_{mc}(G) = \max \left\{ \sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ is a RMCDF of } G, e \in E(G) \right\}$ is called the reverse minus cycle domination number of G . In the paper, we get an upper bound of $\gamma'_{mc}(G)$ for general graphs G and obtain the exact values of $\gamma'_{mc}(G)$ for the maximal planar graph and some special graphs.

Key words: reverse minus cycle dominating function; reverse minus cycle domination number; maximal planar graph

(责任编辑: 吴泽九)