第26卷第1期 华东交通大学学报 Vol 26 No 1
2009年2月 Journal of East China Jiaotong University Feb , 2009

文章编号:1005-0523(2009)01-0094-04

亚纯函数的迭代级 Borel方向

王锦熙,易才凤

(江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘要:研究了无穷级亚纯函数的迭代级 Borel方向问题,证明了从原点出发的射线 $\arg z=\theta$是函数 $f(z)$的 p次迭代级为 σ的 Borel方向的一个充分必要条件. 另外,由这个结果还证明了角域内存在迭代级 Borel方向的一个充分条件.

关 键 词:亚纯函数;迭代级;Borel方向;

中图分类号:O174.52 **文献标识码**:A

1 引言及相关定理

本文所涉及的复平面内亚纯函数的 Nevanlinna值分布理论及其相关记号,角域内的 Ahlfors-Shimizu特征及其相关的定义参见文献[1,2]. 记

$$A(r,\Omega,f)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{r}\left(\frac{|f'(te^{i\theta})|}{1+|f(te^{i\theta})|^{2}}\right)^{2}t\,dt\,d\theta$$

$$T(r,\Omega,f)=\int_{0}^{r}\frac{A(t,\Omega,f)}{t}dt$$

其中: 角域 $\Omega(\alpha,\beta)=\{z\mid \alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta,\ |z|>0\}\ (0\leqslant\alpha<\beta<2\pi)$.

定义 1 亚纯函数 $f(z)$的迭代级 $\sigma_p(f)$定义为

$$\sigma_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p T(r,f)}{\log r},\ (p\in N)$$

其中:$\log_p T(r,f)=\log\log_{p-1}T(r,f),\cdots,\ \log_1 T(r,f)=\log T(r,f),\ \sigma_1(f)=\sigma(f)$

定义 2[3] 设 $f(z)$是一个超越亚纯函数,一条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$称为 $f(z)$的 p次迭代级为 σ的 Borel方向,如果对任意给定的任意小的正数 ε和任意复数 $a\in C_\infty$,至多除去两个可能的例外复数,有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p n(r,\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f=a)}{\log r}=\sigma$$

其中: $n(r,\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f=a)$为扇形 $\{z\mid \theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon,\ 0<|z|<r\}$上 f的 a值点的个数,按其重数计算.

幅角分布是亚纯函数值分布的重要研究方向,而奇异方向又是幅角分布中的一个重要研究对象. 1928年,G. Valiron[6]在 Nevanlinna理论的基础上,证明了有穷正级亚纯函数的 Borel方向的存在性之后,国内外

收稿日期:2008-10-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10871108号);江西师范大学创新基金资助项目

作者简介:王锦熙(1985-),女,江西金溪人,硕士研究生,主要从事复分析的研究.

许多学者对此进行了研究，并取得了丰硕的成果．1994年，张学莲在文[4]中证明了有穷正级的亚纯函数 Borel方向存在性的一个充分必要条件．

定理 A[4]　设 $f(z)$是一个 $\sigma(0<\sigma<\infty)$级亚纯函数，那么一条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$是 $f(z)$的一条 σ级 Borel方向，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$和 $0<\eta<\varepsilon$以下等式成立

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta),f)}{\log r}=\sigma$$

2006年，徐俊峰在文[5]中又证明了亚纯函数的无穷级 Borel方向的一个充分必要条件．

定理 B[5]　设 $f(z)$是一个无穷级亚纯函数，那么一条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$是 $f(z)$的一条无穷级 Borel方向，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$和 $0<\eta<\varepsilon$以下等式成立

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta),f)}{\log r}=\infty$$

我们自然提出一个问题，对于一个无穷级亚纯函数，当它的 $p(0<p<\infty)$次迭代级为有限时，是否具有类似的结论呢？本文对此进行了研究，并给出了肯定的答案，所得的结果比定理 B更精细．另外，由所证明的这个结果可以进一步得到角域内至少存在一条迭代级 Borel方向的一个充分条件．

2　主要结果

定理 1　设 $f(z)$是一个亚纯函数，满足 $\sigma_p(f)=\sigma$, $0<\sigma<\infty$, $0<p<\infty$，那么一条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$是 $f(z)$的一条 p次迭代级为 σ的 Borel方向，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$和 $0<\eta<\varepsilon$以下等式成立

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log_p T(r,\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta),f)}{\log r}=\sigma \tag{1}$$

注：在定理 B中，给出了 $f(z)$的一条无穷级 Borel方向的一个充分必要条件，而定理 1给出了 $f(z)$的一条 p次迭代级为 σ的 Borel方向的一个充分必要条件，本文结果比定理 B更精细．

系　设 $f(z)$是一个超越整函数，满足 $\sigma_p(f)=\sigma$, $0<\sigma<\infty$, $0<p<\infty$, $M(r,f)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$，那么一条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$是 $f(z)$的一条 p次迭代级为 σ的 Borel方向，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$和 $0<\eta<\varepsilon$以下等式成立

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log_{p+1} M(r,\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta),f)}{\log r}=\sigma \tag{2}$$

运用定理 1的结论，我们可以得到角域内至少存在一条迭代级 Borel方向的一个充分条件．即下述定理 2．

定理 2　设 $f(z)$是一个亚纯函数，满足 $\sigma_p(f)=\sigma$, $0<\sigma<\infty$, $0<p<\infty$．记角域 $\Omega_\varepsilon=\Omega(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon)$．如果对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log_p T(r,\Omega_\varepsilon,f)}{\log r}=\sigma$$

则在 $\Omega(\alpha,\beta)$内至少存在一条从原点出发的射线 $\arg z=\theta$是 $f(z)$的一条 p次迭代级为 σ的 Borel方向．

3　定理的证明

定理的证明需要用到下面的引理：

引理[2]　设 $f(z)$是角域 $\Omega=\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta)$及 $\Omega'=(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)(0<\eta<\varepsilon)$中的亚纯函数，则有

$$T(r,\Omega,f)\leqslant 3\sum_{i=1}^{3}N(2r,\Omega',f=a_i)+O((\log r)^2)$$

定理 1的证明　充分性：为了证明从原点出发的射线 $\arg z=\theta$是 $f(z)$的一条 p次迭代级为 σ的 Borel方向，只须证明对任意 $\varepsilon>0$和任意复数 $a\in C_\infty$，至多除去两个可能的例外复数，有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p N(r,\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f=a)}{\log r}=\sigma$$

假设结论不成立,则存在三个复数 $a_i(i=1,2,3)$使得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p N(r,\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),f=a)}{\log r}<\sigma$$

由引理,当 $0<\eta<\varepsilon$时,记 $\Omega=\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta)$和 $\Omega'=(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$,有

$$T(r,\Omega,f)\leqslant 3\sum_{i=1}^{3}N(2r,\Omega',f=a_i)+O((\log r)^2)$$

从而

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p T(r,\Omega,f)}{\log r}\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p 3\sum_{i=1}^{3}N(2r,\Omega',f=a_i)}{\log r}+O(1)<\sigma$$

这与已知矛盾.这样,充分性得证.

必要性:假设结论不成立.因为函数 A与 T有相同的增长级,则存在某个 ε和 $\eta(0<\eta<\varepsilon)$以及 σ_1,使得

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p A(r,\Omega,f)}{\log r}\leqslant\sigma_1<\sigma \tag{3}$$

其中: $\Omega=\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta)$.取 $r=2^k(k=1,2,\cdots)$,用 E_k表示满足下式的 a值的集合

$$n(2^k,\Omega,f=a)\geqslant k^2\exp_{p-1}(2^{k\sigma_1})$$

当 r充分大时,E_k的球形测度不超过 πk^{-2}.事实上,假设 E_k的球形测度小于 πk^{-2},则由函数 A的几何意义,即 πA表示 $F_r=f\{|z|\leqslant r\}$在 Riemann球面上的面积,并按覆盖的重数计算.那么

$$A(2^k,\Omega,f)>\frac{1}{\pi}k^2\exp_{p-1}(2^{k\sigma_1})\pi k^{-2}$$

$$=\exp_{p-1}(2^{k\sigma_1})=\exp_{p-1}(r^{\sigma_1})$$

这与(3)式相矛盾.

令 $E=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}E_k$.因为$\sum k^{-2}$收敛,故 E的球形测度是零.对任意 $a\notin E$,当 r充分大时,假设 $2^k<r<2^{k+1}$,则有

$$n(r,\Omega;f=a)\leqslant n(2^{k+1},\Omega;f=a)$$

$$<(k+1)^2\exp_{p-1}(2^{(k+1)\sigma_1})$$

$$<(k+1)^2\exp_{p-1}(2^{\sigma_1}r^{\sigma_1})$$

$$n(r,\Omega;f=a)\leqslant\exp_{p-1}(r^{\sigma_2})(0<\sigma_1<\sigma_2<\sigma)$$

因为 E的球形测度是零,从而几乎对每个 a,当 r充分大时,上式都成立.这与射线 $\arg z=\theta$是 $f(z)$的一条 p次迭代级为 σ的 Borel方向相矛盾,必要性也成立.故我们的结论成立.

定理 2的证明 将角域 Ω_ε等分成两个角域 Ω_{11},Ω_{12},则 Ω_{11},Ω_{12}中至少有一个角域(记这个角域为 Ω_1)满足

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p T(r,\Omega_1,f)}{\log r}=\sigma$$

继续将 Ω_1等分成两个角域 Ω_{21},Ω_{22},则 Ω_{21},Ω_{22}中至少有一个角域(记这个角域为 Ω_2)满足

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p T(r,\Omega_2,f)}{\log r}=\sigma$$

如此无限等分下去,必存在一条射线 $\arg z=\theta$,使得对任意 $\varepsilon>0$和 $0<\eta<\varepsilon$有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p T(r,\Omega(\theta-\eta,\theta+\eta,)f)}{\log r}=\sigma$$

由定理 1可知,射线 $\arg z=\theta$即为 $f(z)$的一条 p次迭代级为 σ的 Borel方向.定理证毕.

(下转第 110页)

Realization of Planetary Gear Mechanism Movement Simulation by VRML

REN Ji-wen

(School of Mechanical and Electrical Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Virtual Design is a very important aspect in CAD research and it is widely applied in the design of mechanism. Now many CAD softwares can realize the virtual design of mechanism and simulation of mechanism movement. But its file is bulky and the interaction is weak, so it is difficult to transfer on the web. VRML provides a brand-new thought or method to resolve the problem. The feature of VRML is introduced in this paper and the method and principle of creating static and dynastic virtual model using CAD software and VRML is researched. The key technology of realizing movement simulation of planetary gear mechanism is emphasized.

Key words: VRML; planetary gear mechanism; movement simulation

(责任编辑:王建华)

(上接第 96页)

参考文献:

[1] 杨 乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社, 1982.
[2] M. TSUJI. Potential theory in modern function theory[M]. Tokyo: Maruzen Co. LTD, 1959.
[3] 曹廷彬. 关于迭代级亚纯函数的 Borel例外值、充满圆及 Borel方向[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2005, 29(1): 4—7.
[4] ZHANG Xue-lian. A fundeamental inequality for meromorphic function in an angular domain and its application[J]. Acta mathematica Sinica, New Series. 1994, 3(10): 308—314.
[5] 徐俊峰, 陈聚峰. 亚纯函数的无穷级 Borel方向[J]. 海南大学学报(自然科学版), 2006, 24(4): 328—335.
[6] G. Vliron. Recherehes sur le théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions méromorphes[J]. Acta Math., 1928(52): 67—92.

Borel Direction with Iterated Order of Meromorphic Function

WANG Jin-xi, YI Cai-feng

(School of Mathematics and Information Sciences, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: This paper studies the Borel direction with iterated order of the meromorphic functions of infinite order, and proves a sufficient and necessary condition of a radial $\arg z=\theta$ being a Borel direction with p-iterated order σ of $f(z)$. In addition, from the result, we can obtain a sufficient condition of existing Borel direction with iterated order in angular domain.

Key words: meromorphic function; iterated order; borel direction

(责任编辑:王建华)