文章编号:1005－0523(2009)01－0097－04

直径为 5的树的优美性

陈相兵

(四川大学 数学学院,四川 成都 610064)

摘要:本文利用移边定理 (引理 1),对星型树进行移边操作,针对不同情况,得到了相应特殊标号点分布的双星型树,再技巧性地移边,最终得到一组具体的优美标号,证明了任一直径为 5的树的优美性.

关 键 词:优美树,平衡二分图,移边树

中图分类号:O157 **文献标识码**:A

优美树猜想至今是个悬而未决的世界难题,在此领域所出结果层出不穷,其应用范围涵及计算机领域、数论等,其重要性不言而喻. Huang等人提出"直径为 4的树是否优美[4]"是解决本猜想的一个关键问题,该问题现已解决[1]. 本文在此基础之上对"直径为 5的树是否优美"进行了一些研究.

1 定义及引理

定义 1 T是树,若其标号 f满足:

$$f[V(T)] = \{ f(u) \mid u \in V(T) \} = \{0, 1, 2, \cdots, |E(T)|\}$$

$$l_f[E(T)] = \{ l_f(uv) = |f(u) - f(v)| \mid uv \in E(T) \} = \{1, 2, \cdots, |E(T)|\}$$

则称 f为 T的一个优美标号,称 T是一棵优美树,记 l_f是 f所导出的边标号.

定义 2 设树 T为一优美树, $u, v \in E(T)$, $\deg u \geqslant 2$,其中 $\deg u_0 = 1$,且 u_0是 u的悬挂点,将 uu_0移至顶点 v上得到一棵新树,称为 T的移边树 $T' = T - uu_0 + vu_0$.

Huang Rosa等人提出了下述的移边定理:

引理 1 设 T是一棵优美树,其优美标号函数为 f u和 v是 T的两个顶点, u_1和 u_2是与 u邻接的两个叶.

(1) 如果 $f(u_1) + f(u_2) = f(u) + f(v)$,则 T的移边树 $T' = T - uu_1 - uu_2 + vu_1 + vu_2$仍是以 f为优美标号的优美树.

(2) 如果 $2f(u_1) = f(u) + f(v)$,则 T的移边树 $T'' = T - uu_1 + vu_1$也是以 f为优美标号的优美树.

引理 2[2] 优美图 G关于优美标号的最大标号点 (或最小标号点)与平衡二分图 H关于平衡标号的最大标号点、最小标号点、二分点和对偶二分点中的任何一点粘接一起,所得到的图 G • H是优美图. (平衡二分树又名交叉树)

2 主要结论及证明

定理 直径为 5的树都是优美性.

收稿日期:2008－11－12

作者简介:陈相兵 (1985－),男,安徽安庆人,硕士研究生.

证明 直径为 5的树的一般形式如图 1,其中,P_1 为与 a_0 邻接的悬挂点数目,P_2 为与 b_0 邻接的悬挂点数目,S_1 与 S_2 为与左右端点邻接枝上叶子数,详见图 1. L_i, $l_j \geqslant 1$, $1\leqslant i \leqslant P_1$, $1\leqslant j \leqslant P_2$, P_1, $P_2 \geqslant 1$, S_1, $S_2 \geqslant 0$,用 a_0, b_0 表示左右中心端点,$a_i(1\leqslant i\leqslant P_1+S_1)$表示与 a_0邻接的顶点,$b_i(1\leqslant i\leqslant P_2+S_2)$表示与 b_0 邻接的顶点,$a_{ij}(1\leqslant i\leqslant P_1, 1\leqslant j\leqslant L_i)$、$b_{ij}(1\leqslant i\leqslant P_2, 1\leqslant j\leqslant l_i)$分别表示长在 a_i与 b_i上的叶.

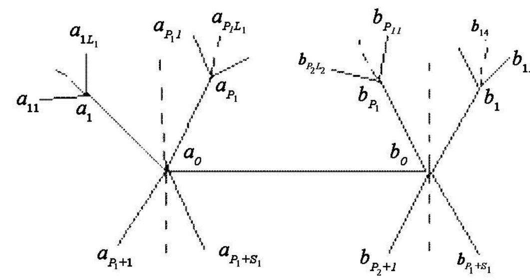

图 1 $T(P_1, P_2; S_1, S_2)$

首先,令 $P=P_1+P_2$, $S=S_1$, $\bar{l}_i=l_i(1\leqslant i\leqslant P_2)$, $\bar{l}_i=L_{i-P_2}(P_2+1\leqslant i\leqslant P_2+(P_1+S_1))$, $q=P_1+P_2+S_1+\sum_{i=1}^{P_1}L_i+\sum_{i=1}^{P_2}l_i+1\overset{\Delta}{=}P+S+\sum_{i=1}^{P_1+P_2}\bar{l}_i+1$.

对 $P_1+P_2+S_1=P+S$分成奇数和偶数两种情况进行讨论.

情况 1 当 $P+S=2n+1(n=1, 2, \cdots)$时

首先,设有 q条边的星型树为 T^*,中心点 q其余悬挂点集为$\{0, 1, \cdots, q-1\}$.

其次,利用引理 1对 T^* 进行移边.

(1) 当 P_2 为偶数时,则将 i $q-i$($i=1, 2, \cdots, \frac{P_2}{2}$)的 P_2 个叶连同其关联的边从标号为 q的点移至与 0标号点相关联处,变成双星形树 T^{**}.

(2) 当 P_2 为奇数时,令 $P_2'=P_2-1$, $P=P_1+P_2'$, $S=S_1$,

$$\bar{l}_i=l_i(1\leqslant i\leqslant P_2'),\ \bar{l}_i=L_{i-P_2'}(P_2'+1\leqslant i\leqslant P_2'+(P_1+S_1)),$$

$$q=P_1+P_2'+S_1+\sum_{i=1}^{P_1+P_2'}\bar{l}_i+1=P+S+\sum_{i=1}^{P_1+P_2'}\bar{l}_i+1.$$

由于 $P_1+(P_2-1)+S_1=P_1+P_2'+S_1=P+S$为偶数,这就变成了情况 2,在该情况中讨论,得到优美标号后,我们在 b_0 点添加 S_2 条悬挂边,标号集为$\{q+1, q+2, \cdots, q+S_2\}$,然后粘接一个中心点 $l_{p2}+1$,其余悬挂点集为$\{0, 1, \cdots, l_{p2}\}$的交叉树,由引理 2知,将标号为 l_{p2}的点与 b_0 ($f(b_0)=0$)粘接,此图仍是优美的.

综上可知,在情况 1中,我们只须考虑 P_2 为偶数.

最后,对 T^{**} 进行再移边,使之与 $T(P_1, P_2; S_1, S_2)$同构.这里我们分三种情况给予讨论.

令

$$f(b_i)=\begin{cases}0, & i=0\\ \dfrac{i+1}{2}, & i=1, 3, \cdots, P_2-1\\ q-\dfrac{i}{2}, & i=2, 4, \cdots, P_2\end{cases}$$

$$f(a_i)=\begin{cases}q & i=0\\ \dfrac{P_2}{2}+\dfrac{i+1}{2}, & i=1, 3, \cdots, 2n-P_2+1\\ q-\dfrac{P_2+i}{2}, & i=2, 4, \cdots, 2n-P_2\end{cases}$$

当 $\bar{l}_i$($i=1, 2, \cdots, P_2, \cdots, P_2+P_1$)均为奇数时,对 T^{**} 进行移边,将$\{n+2, \cdots, q-(n+1)\}$连同与其关联的边从标号 q的点移至 1标号点相关联处,得到移边树 T_1^{**}. $\{n+2, \cdots, q-(n+1)\}$中第一点与倒数第一点,第二点与倒数第二点……的标号之和都为 $q+1$.由引理 1, T_1^{**}是优美的.

对 T_1^{**}继续移边,将连续标号点$\left\{n+1+\dfrac{\bar{l}_1+1}{2}, \cdots, q-(n+1+\dfrac{\bar{l}_1+1}{2}\right\}$连同与其关联的边都从 1标号点移至与 $q-1$标号点关联处,得到移边树 T_2^{**},显然 T_2^{**}也是优美的 (引理 1).

标号$\left\{n+2, \cdots, n+\dfrac{\bar{l}_1+1}{2}\right\}\cup\left\{q-(n+\dfrac{\bar{l}_1+1}{2}), \cdots, q-(n+1)\right\}$的 $\bar{l}_1$ 个点留在 1标号点相关联处.当 $\bar{l}_1=$

1, $\{q-(n+1)\}$留在 1标号点处.

一直这样进行下去,从 $q-1$标号点移边至 2标号点的关联处,再从 2至 $q-2$……最终通过不断的移边将 T^{**}变成 $T(P_1, P_2; S_1, 0)$,再由 (2)可得到 $T(P_1, P_2; S_1, S_2)$,它也是优美的,优美标号易得.

当 $\bar{l}_i(i=1, 2, \cdots, P_2, \cdots, P_2+P_1)$均为偶数时,可得 $q=P+S+\sum_{i=1}^{n}\bar{l}_i+1$为偶.跟上述类似对 T^{**}进行合适地移边,将连续的标号点集 $\{n+2, \cdots, q-(n+1)\}$连同其相关联的边从标号为 q的点移至 1标号点处,得到移边树 T_1^{**},显然得到树 T_1^{**}是优美的.

对 T_1^{**}再移边,将标号为$\left\{n+\frac{\bar{l}_1}{2}+1, \cdots, \frac{q}{2}-1, \frac{q}{2}+1, \cdots, q-\left(n+\frac{\bar{l}_1}{2}+1\right)\right\}$的点与其关联边移至 $q-1$标号点处,得到新的移边树 T_2^{**}.标号为

$$\left\{\frac{q}{2}\right\}\cup\left\{n+2, \cdots, n+\frac{\bar{l}_1}{2}\right\}\cup\left\{q-\left(n+\frac{\bar{l}_1}{2}\right), \cdots, q-(n+1)\right\} \qquad (*)$$

的点与其关联边留于 1标号点处.当 $\bar{l}_1=2$时, $(*)$变为$\left\{\frac{q}{2}\right\}\cup\{q-(n+1)\}$.

对 T_2^{**}继续移边,将标号为$\left\{n+\frac{\bar{l}_1+\bar{l}_2}{2}+1, \cdots, \frac{q}{2}+2, \cdots, q-\left(n+\frac{\bar{l}_1+\bar{l}_2}{2}\right)\right\}$的点及其关联边移至与 2标号点关联处,从而得到移边树 T_3^{**}.标号集

$$\left\{\frac{q}{2}+1\right\}\cup\left\{n+\frac{\bar{l}_1}{2}+1, \cdots, n+\bar{l}_1+\frac{\bar{l}_2}{2}\right\}\cup\left\{q-\left(n+\bar{l}_1+\frac{\bar{l}_2}{2}-1\right), \cdots, q-\left(n+\frac{\bar{l}_1}{2}+1\right)\right\} \qquad (**)$$

的点与其关联边留于 $q-1$标号点的关联处.当 $\bar{l}_1=2$时, $(**)$变为$\left\{\frac{q}{2}+1\right\}\cup\left\{n+\frac{\bar{l}_1}{2}+1\right\}$.

这样,照上述情况中的移边顺序不断做下去,最终可将 T^{**}通过移边变成 $T(P_1, P_2; S_1, 0)$,故此可得到 $T(P_1, P_2; S_1, S_2)$,它也是优美的,优美标号易得.

若在 $\{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \cdots, \bar{l}_{P_2+P_1}\}$中,既有奇数,又有偶数时:

不妨设 $\{\bar{l}_i \mid 1\leqslant i\leqslant P_2\}$中奇数集合为 $A_1=\{\bar{l}_1, \bar{l}_2, \cdots, \bar{l}_{r_2}\}$,偶数集合为 $A_2=\{\bar{l}_{r_2+1}, \cdots, \bar{l}_{P_2}\}$, $\{\bar{l}_i \mid P_2+1\leqslant i\leqslant P_2+P_1\}$中奇数集合为 $B_1=\{\bar{l}_{P_2+1}, \cdots, \bar{l}_{P_2+r_1}\}$,偶数集合为 $B_2=\{\bar{l}_{P_2+r_2+1}, \cdots, \bar{l}_{P_2+P_1}\}$.具体操作顺序为,按照上述标号顺序依次操作下述集合: $A_1\to A_2\to B_2\to B_1$.

情况 2　当 $P+S=2n(n=1, 2, \cdots)$时

(1) $S_1=0$时, P_1+P_2为偶数.

当 P_2为偶时,那么 P_1为偶.

若 P_2+S_2为奇,则 $P_1+(P_2+S_2)$为奇,显然符合情况 1;

若 P_2+S_2为偶,那么 S_2为偶,则

当 $S_2=0$时,将 P_1-1作为新的 P_1,那么 $(P_1-1)+P_2+S_1$为奇,符合情况 1;

当 $S_2\geqslant 2$时,令 S_2-1为新的 S_2,先操作 P_1作为新的 P_2, P_2与 S_2-1作为新的 P_1与 S_1,显然 $P_1+P_2+(S_2-1)$为奇,正好符合情况 1.

当 P_2为奇时,那么 P_1亦为奇.

若 P_2+S_2为奇,则将 P_1-1作为新的 P_2, P_2+S_2作为新 P_1+S_1,又为奇,符合情况 1;

若 P_2+S_2为偶,那么 S_2为奇.将 P_2-1作为新的 P_2,显然符合情况 1.

(2) $S_1\geqslant 1$时,

(2.1) P_2为偶时,那么 P_1+S_1为偶.

若 P_2+S_2为奇,则

P_1为偶,那么将 P_1作为新的 P_2, P_2+S_2作为新的 P_1+S_1,显然符合情况 1;

P_1为奇,那么 S_1为奇,将 P_2-1(偶)作为新 P_2, P_2+S_2作为新 P_1+S_1,符合情况 1.

若 P_2+S_2为偶,那么 S_2为偶.因为 P_2为偶,则 P_1+S_1为偶.这里我们分两种情况讨论.

Ⅰ.当 P_1为奇时, S_1为奇.

若 q为奇数，T^{**}中的$\{q-n\}$与$\left\{\frac{q+1}{2}\right\}$对调，操作类似情况 1.

若 q为偶数，操作同下面的 q为偶数的情况.

Ⅱ.当 P_1为偶时，S_1为偶，对 T^{**}调整如下.

当 q为奇数时，将 T^{**}中的$\{q-n\}$与$\left\{\frac{q+1}{2}\right\}$对调，剩下的操作与情况 1类似.令 $C \overset{\Delta}{=} \{\bar{l}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant P_2+P_1\}$，$C$中全为奇数时，显然 q为奇；C中全为偶时，显然 q为奇；C中有奇有偶时，只有 A_1与 B_1出现奇数个奇，奇数个偶时，A_2与 B_2同样如此时，q才会出现的偶数的情况，否则 q就为奇.

当 q为偶数时，将 T^{**}中的$\{q-n\}$与$\{n+1\}$对调，其中 $\bar{l}_i$是上述 q为奇数中第一种情况.标号点操作顺序为：$q \to 2 \to q-1 \to 1 \to q-2 \to \cdots$，省略号后面的操作类似情况 1的第三种情况.

(2.2) 当 P_2为奇时，那么 P_1+S_1为奇.将 P_2-1作为新的 P_2，显然符合情况 1.

综合情况 1、情况 2，得出结论：任意直径为 5的树都是优美的.

下面指出 $T(3,2;4,5)$及 $T(2,2;3,0)$的优美标号如下.

$T(3,2;4,5)$：左边中心点 a_0标号为$\{29\}$，与 a_0邻接的非悬挂点标号$\{2,3,27\}$，其邻接点标号对应为$\{\{10,11,12,17,18,19,20\},\{15\},\{13,14,16\}\}$，$a_0$悬挂点标号$\{4,25,5,26\}$；按此标号顺序列出 b_0右边相应标号，$\{0\}$，$\{28,1\}$，$\{\{7,8,9,21,22\},\{6,23,24\}\}$，$\{30,31,32,33,34\}$.

同理，$T(2,2;3,0)$对应标号如下.

a_0：$\{22\}$，$\{3,20\}$，$\{\{11,12\},\{15\},\{13,14,10,9,15\}\}$，$\{2,4,19\}$；

b_0：$\{0\}$，$\{21,1\}$，$\{\{6,7,8,16\},\{5,17,18\}\}$.

参考文献：

[1] 金德俊，孟凡洪，王锦功.直径为 4的树的优美性[J].吉林大学学报(理学版)，1993，(1)：17－22.

[2] 马克杰.优美图[M].北京：北京大学出版社，1991.

[3] Rosa A. On Certain Valuations of the Vertices of a Graph Theory of Graph[M]. Rome: Proc Inemat Sympos 1966.

[4] Huang C, Kotzing A, Rosa A. further results on tree labellings[J]. Utilitas Math, 1982, (21): 31－48.

The Gracefulness of the Trees with a Diameter 5

CHEN Xiang-bing

(College of Mathematics Si Chuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In this paper we get a double-star tree of special labelling distribution by applying the edge-moving theorem (lemma 1) to the star tree. Then we obtain a graceful labeling and prove the gracefulness of any tree with a diameter 5 by moving the edges cleverly.

Key words: graceful trees; balanced bipartite graphs; edge-moving trees

(责任编辑：王建华)