第26卷第2期 华东交通大学学报 Vol 26 No 2
2009年4月 Journal of East China Jiaotong University Apr, 2009

文章编号:1005-0523(2009)02-0091-06

关于图的反符号圈控制数

赵 华,徐保根,赵金凤,帅春萍

(华东交通大学 基础科学学院,南昌 330013)

摘要:引入了图的反符号圈控制的概念,设 $G=(V,E)$ 是一个非空图,一个函数 $f:E\to\{+1,-1\}$ 对 G 中每一个无弦圈 C 均有 $\sum_{e\in E(C)} f(e)\leqslant 0$ 成立,则称 f 为图 G 的一个反符号圈控制函数,而 $\gamma'_{rsc}(G)=\max\{\sum_{e\in E(G)} f(e)\mid f$ 为图 G 的反符号圈控制函数$\}$ 称为图 G 的反符号圈控制数。给出了图的反符号圈控制数的界限,刻画了满足 $\gamma'_{rsc}(G)=-|E(G)|+2$ 的所有连通图 G,并且确定了图与补图以及几类特殊图的反符号圈控制数。

关 键 词:反符号圈控制函数;反符号圈控制数;平面图;轮图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文献[1]。

设 $G=(V,E)$ 是一个图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别为图 G 的顶点集和边集,对任意点 $u\in V$,$N_G(u)$ 表示图 G 中点 u 的开邻域。$d_G(u)=|N_G(u)|$ 表示图 G 中点 u 的度,且 $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度。若 $S\subseteq V(G)$,则 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图。$G\subset H$ 表示 G 为 H 的子图。若 $G\subset H$,则记 $H-G=H[V(H)\setminus V(G)]$。两个点不相交的图 G_1 和 G_2 的并记为 $G_1\cup G_2$。对于任意两个点不相交的图 G_1 和 G_2,$G_1\vee G_2$ 表示 G_1 和 G_2 的联图,其边 $E(G_1\vee G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv\mid u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}$。设 G 为连通图,对 $u,v\in V(G)$,$d_G(u,v)$ 表示 G 中 u 点与 v 点的距离。最后,$\bar{G}$ 表示 G 的补图。

若 C 为图 G 中一个长度不小于4的圈,u 和 v 为 C 中两个不相邻的顶点,如果 $uv\in E(G)$,则称 uv 为圈 C 的一条弦。图 G 的一个圈 C 是无弦的当且仅当 $G[V(C)]=C$。G 的一个无弦圈也称为 G 的一个导出圈。

对于一个实值函数 $f:E\to R$ 和一个子集 $S\subseteq E(G)$,则记 $f(S)=\sum_{e\in S} f(e)$,并且有 $f(E)=\sum_{e\in E} f(e)$,$f(G)=\sum_{e\in E(G)} f(e)$。

近年来,图的控制理论研究内容越来越广泛,从图的点控制到边控制、全控制,再到各种各样的特殊控制,从图的一般控制到符号控制、减控制,再到反符号控制,引入了许多新概念和新参数[2~4],从而使图的控制理论不断丰富和完善。这里我们将引入图的反符号圈控制的概念。

收稿日期:2008-10-08

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10661007);江西省自然科学基金资助项目(2007GZS0715)

作者简介:赵华(1984-),女,陕西榆林人,硕士生,研究方向为运筹学与控制论。

1 定义

定义 1.1 设 $G=(V,E)$是一个非空图，一个函数 $f:E\to\{+1,-1\}$满足$\sum_{e\in E(C)}f(e)\leqslant 0$对 G中每一个无弦圈 C均成立，则称 f为图 G的一个反符号圈控制函数。图 G的反符号圈控制数定义为 $\gamma'_{rsc}(G)=\max\{\sum_{e\in E(G)}f(e)\mid f$为 G的反符号圈控制函数$\}$。对于空图 $\bar{K}_n$，则定义 $\gamma'_{rsc}(\bar{K}_n)=0$。

由定义知，$-|E(G)|\leqslant\gamma'_{rsc}(G)\leqslant|E(G)|$为反符号圈控制数的平凡界限，且有如下性质：

引理 1.2 对于任意图 G，则有

(1) $\gamma'_{rsc}(G)=|E(G)|$当且仅当 G中无圈；

(2) 对于任意两个点不相交的图 G_1和 G_2，均有 $\gamma'_{rsc}(G_1\cup G_2)=\gamma'_{rsc}(G_1)+\gamma'_{rsc}(G_2)$且 $\gamma'_{rsc}((G_1\cup G_2)\vee K_1)=\gamma'_{rsc}(G_1\vee K_1)+\gamma'_{rsc}(G_2\vee K_1)$；

(3) $\gamma'_{rsc}(G)\equiv|E(G)|\pmod 2$；

(4) $\gamma'_{rsc}(G)=-|E(G)|$当且仅当 $G=\bar{K}_n$（n为正整数）为空图。

为简便，对所有图 G，令 $\pi(G)=(1/2)(|E(G)|+\gamma'_{rsc}(G))$。

显然，$\pi(G)=|\{e\in E(G)\mid f(e)=1\}|$，其中 f为图 G的一个最大的反符号圈控制函数。由以上引理可知，$\pi(G)=0$当且仅当 $G=\bar{K}_n$（n为正整数），而且，$\pi(G)=1$当且仅当 $\gamma'_{rsc}(G)=-|E(G)|+2$。根据定义，对于任意非空图 G，均有 $\gamma'_{rsc}(G)\geqslant-|E(G)|+2$，下面刻画使此等式成立的所有连通图 G。

定理 1.3 设 G为一个连通图，则 $\gamma'_{rsc}=-|E(G)|+2$当且仅当 $G\in\{K_2,K_3\}$。

证明 充分性是显然的，下面证明必要性。容易看出 $\gamma'_{rsc}(G)=-|E(G)|+2$当且仅当 $\pi(G)=1$。

情况 1 若 G为一棵树，则有 $\gamma'_{rsc}(G)=|E(G)|$，从而 $|E(G)|=1$，即有 $G=K_2$。

情况 2 若 G包含 K_3作为子图，记 $V(K_3)=\{u_1,u_2,u_3\}$。下面证明 $G=K_3$。

注意到 $\pi(K_3)=1$。反证。假设 $G\neq K_3$，由于 G是一个包含 K_3的连通图，故存在一点 $v\in V(G)\setminus V(K_3)$，使得 v点至少邻接到 K_3的一个顶点，不妨设 $u_1v\in E(G)$。定义 G的一个反符号圈控制函数 f如下：

$$f(e)=\begin{cases}1, & \text{当 } e\in\{u_2u_3,u_1v\}\text{时},\\ -1, & \text{否则。}\end{cases}$$

可见 $\pi(G)\geqslant 2$，矛盾。因此 $G=K_3$。

情况 3 若 G含圈但不包含 K_3作为子图，则对图 G中的任一个圈 C_i（$i\geqslant 4$），均有 $\pi(C_i)\geqslant 2$成立，可见 $\pi(G)\geqslant 2$，矛盾。所以此情况不存在。证毕。

对于定理 1.3，除去图满足连通性这个条件可得到推广，且有以下命题。

命题 对于图 G，则有 $\gamma'_{rsc}(G)=-|E(G)|+2$当且仅当 $G=H\cup\bar{K}_b$，其中 $H\in\{K_2,K_3\}$，b为非负整数。

证明 若 G为连通图，则根据定理 1.3有 $G=H\in\{K_2,K_3\}$，命题成立。

假设 G不连通。令 H为 G的一个连通分支，L为除去 H外 G的其余连通分的并。所以记 $G=H\cup L$。由 $\gamma'_{rsc}(G)=-|E(G)|+2$当且仅当 $\pi(G)=1$，且根据引理 1.2(2)有 $\pi(H\cup L)=\pi(H)+\pi(L)$。不失一般性，令 $\pi(H)=1$且 $\pi(L)=0$，得到 $\gamma'_{rsc}(L)=-|E(L)|$。由引理 1.2(4)知 $L=\bar{K}_n$（n为非负整数），并且根据定理 1.3命题成立。证毕。

根据定理 1.3和引理 1.2 (3)，有以下推论。

推论 1.4 对任意连通图 $G\notin\{K_1,K_2,K_3\}$，则有 $\gamma'_{rsc}(G)\geqslant-|E(G)|+4$。

2 反符号圈控制数的界限

定理 2.1 对于任意 n阶图 G，均有 $\gamma'_{rsc}(G)\leqslant n-1$，当且仅当 G为树时等式成立。

证明 若图 G中无圈,则 G为树或森林,显然有 $\gamma'_{rsc}(G)\le |E(G)|\le n-1$。若图 G中有圈,则 G中必有无弦的圈。设 G中(至多)共有 t个边不相交的无弦圈,分别记为 $C^1, C^2, \cdots, C^t$。令 $T=G-\bigcup_{i=1}^{t}E(C^i)$,可见 T为无圈图(树和森林),因而 $|E(G)|\le n-1$。

设 f为图 G的一个反符号圈控制函数,且使得 $\gamma'_{rsc}(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)$,由定义知,对于每一个无弦圈 $C^i(1\le i\le t)$,均有 $\sum_{e\in E(C^i)}f(e)\le 0$,从而有

$$\gamma'_{rsc}(G)=\sum_{e\in E(G)}f(e)=\sum_{e\in E(T)}f(e)+\sum_{i=1}^{t}\sum_{e\in E(C^i)}f(e)\le |E(T)|+0\cdot t\le n-1,$$

并且当且仅当 G为树时($t=0$)定理中等式成立。证毕。

定理 2.2 对任意 n阶图 G,若 $|E(G)|=m$,则 $\gamma'_{rsc}(G)\le 2n-m-2$,且等式成立当且仅当 G是一棵树。

证明 反证。假设 $\gamma'_{rsc}(G)\ge 2n-m-1$,由引理 1.2(3)知 $\gamma'_{rsc}(G)\equiv m\pmod 2$,即有 $\gamma'_{rsc}(G)\ge 2n-m$,设 f为图 G的一个反符号圈控制函数,且使得 $\gamma'_{rsc}(G)=f(E)$。

令 $A=f^{-1}(1)=\{e\in E(G)\mid f(e)=1\}$, $B=f^{-1}(1)=\{e\in E(G)\mid f(e)=-1\}$, $s=|A|$, $t=|B|$,则有 $s=\pi(G)=\frac{1}{2}(m+\gamma'_{rsc}(G))\ge n$。定义图 G的一个子图 G_1:令 $V(G_1)=V(G)$, $E(G_1)=A$。

由于 $|E(G_1)|=s\ge n=|V(G_1)|$,故 G_1中至少包含一个圈 C,注意到,$E(C)\subseteq A$且 f为图 G的一个反符号圈控制函数,可见 C中必有一条弦(否则,C为 G中的无弦圈,由定义得 $f(C)=|E(C)|\ge 3$,矛盾)。

选择 C的一条弦 $e=uv\in E(G)$,使得距离 $d=d_c(u,v)$尽可能小(取遍 C的所有弦),注意到 $d\ge 2$,C中包含一条从 u点到 v点长度为 d的路 P_{d+1},故 $C_{d+1}=P_{d+1}+uv$是一条无弦圈,由 $P_{d+1}\subseteq C\subseteq G_1$得 $f(C_{d+1})=d+f(uv)\ge d-1\ge 1$,矛盾。因此,有 $\gamma'_{rsc}(G)\le 2n-m-2$成立。

下面证明 $\gamma'_{rsc}(G)=2n-m-2$成立当且仅当 G是一棵树。

充分性是显然的,下面证明必要性。由于 $\gamma'_{rsc}(G)=2n-m-2$,故有

$s=(1/2)(m+\gamma'_{rsc}(G))=n-1$。假设 G_1(上述定义)包含一个圈,同样导出矛盾,故 G_1不包含圈,又因 $|E(G_1)|=s=|V(G_1)|-1$,故 G_1为一棵树。

下面证 $G=G_1$。反证。假设 $M=E(G)\setminus E(G_1)\neq\phi$,选取 $e=uv\in M$,使得距离 $d=d_{G_1}(u,v)$尽可能小($d\ge 2$),明显地,图 G_1+uv恰好包含一个圈 C_{d+1},且为 G的无弦圈,类似地得到 $f(C_{d+1})=d+f(uv)\ge d-1\ge 1$,矛盾。证毕。

推论 2.3 对任意 n阶图 G,若 $|E(G)|=m$且 G不是一棵树,则有 $\gamma'_{rsc}(G)\le 2n-m-4$。

若在一个平面图 G中任意两个不相邻的顶点之间添加一条边所得到的图均为不可平面图,则称 G为极大可平面图。显然,一个极大可平面图的每个面(包括外部面)的边界均为三角形。若一个可平面图 G存在一个所有顶点均在同一个面的平面嵌入,则称 G为外可平面图。若在一个外可平面图 G中任意两个不相邻的顶点之间添加一条边所得到的图均不是外可平面图,则称 G为极大外可平面图。极大外可平面图的外平面嵌入称为极大外平面图。一个极大外平面图的每个内部面同样是由三角形围成。

引理 2.4[5] (1)设 G为一个 $n\ge 3$阶极大平面图,则 $|E(G)|=3n-6$;

(2)设 G为一个 $n\ge 3$阶极大外平面图,则 $|E(G)|=2n-3$;

(3)设整数 $n\ge 3$,则每个 n阶极大平面图有 $2n-4$个面(包括外部面)。

定理 2.5 (1)对于任意 $n\ge 3$阶极大平面图 G,有 $\gamma'_{rsc}(G)\le 2-n$;

(2)对于任意 $n\ge 3$阶极大外平面图 G,有 $\gamma'_{rsc}(G)\le -1$。并且,这里的上界都是最好可能的。

证明 根据引理 2.4的(1)和(2)及推论 2.3,结论显然。

关于定理 2.5(1)，也可以用以下的方法证明。

将图 G 嵌入平面内，由引理 2.4知，图 G 共有 $2n-4$ 个面(包括外部面)，分别记为 $F_1, F_2, \cdots, F_{2n-4}$，令 $C(F_i)$ 表示面 F_i 的边界三角形的三条边集，$1\leqslant i\leqslant 2n-4$。设 f 为图 G 的一个反符号圈控制函数，且使得 $\gamma'_{rsc}(G)=\sum_{e\in E(G)} f(e)$，由定义知，对于每一个 $C(F_i)$，均有 $\sum_{e\in C(F_i)} f(e)\leqslant -1$，从而有 $2\gamma'_{rsc}(G)=\sum_{i=1}^{2n-4}\sum_{e\in C(F_i)} f(e)\leqslant 4-2n$，即 $\gamma'_{rsc}(G)\leqslant 2-n$。证毕。

为了说明定理给出的上界是最好可能的，下面给出两个例子，使其等式成立。

例 1[6] 对任意整数 $n\geqslant 3$，则 $F_n=P_{n-1}\vee K_1$ 称为一个 n 阶扇图，也是一个 n 阶极大外平面图。容易得到 $\gamma'_{rsc}(F_n)=-1$(见定理 4.3)。同样，在 C_6 的内部添加三条弦构造三角形所得到的极大外平面图 G，不难验证 $\gamma'_{rsc}(G)=-1$。

例 2[7] 令 $G_1=K_3$，G_2 表示 G_1 的内部面上取一点邻接 G_1 的三个顶点所得的图，由此类推，G_{i+1} 表示 G_i 的任意一个内部面 F 上取一点邻接 F 的边界上的三个顶点所得的图(注意到 F 的边界为三角形)。显然 $G_i(i=1,2,3,\cdots)$ 为一个极大平面图，且 $|V(G_i)|=i+2$。

对 i 用归纳法。证明对所有 $i(i=1,2,3,\cdots)$ 均有 $\gamma'_{rsc}(G_i)=2-|V(G_i)|=-i$ 成立。

显然，$\gamma'_{rsc}(G_1)=-1$。假设 $\gamma'_{rsc}(G_i)=-i$，则 G_i 存在一个最大的反符号圈控制函数 f_i，使得 $f_i(G_i)=\gamma'_{rsc}(G_i)=-i$。

现考虑上面定义的图 G_{i+1}。设点 u 为在 G_i 的任意一个内部面上所取的一点，三条边 uv_1，uv_2 和 uv_3，其中 v_1，v_2 和 v_3 分别表示 G_i 的内部面(三角形)上的三个顶点。由于 $f_i(v_1v_2)+f_i(v_2v_3)+f_i(v_1v_3)\leqslant -1$，不失一般性，设 $f_i(v_1v_2)=f_i(v_2v_3)=-1$。定义 f_{i+1} 如下：

$$f_{i+1}(e)=\begin{cases} f_i(e), & \text{当 } e\in E(G_i)\text{ 时；}\\ -1, & \text{当 } e\in\{uv_1, uv_3\}\text{ 时；}\\ 1, & \text{当 } e=uv_2\text{ 时。}\end{cases}$$

不难验证 f_{i+1} 为 G_{i+1} 的一个反符号圈控制函数，所以 $\gamma'_{rsc}(G_{i+1})\geqslant f_{i+1}(G_{i+1})=-i-1$。由定理 2.5(1)知 $\gamma'_{rsc}(G_{i+1})\leqslant 2-|V(G_{i+1})|=2-(i+3)=-i-1$，因此，$\gamma'_{rsc}(G_{i+1})=-i-1$。证毕。

3 图与补图的反符号圈控制数

定理 3.1 对任意 n 阶图 $G(n\geqslant 1)$，均有 $\gamma'_{rsc}(G)+\gamma'_{rsc}(\bar{G})\leqslant (n-1)(8-n)/2$，并且等式成立当且仅当 $G=P_4$ 或 K_1。

证明 反证。假设存在 n 阶图 G，使得 $\gamma'_{rsc}(G)+\gamma'_{rsc}(\bar{G})\geqslant (n-1)(8-n)/2+1$，即有

$\gamma'_{rsc}(G)+\gamma'_{rsc}(\bar{G})\geqslant (9n-n^2)/2-3=4n-|E(G)|-|E(\bar{G})|-3$，

从而下面两式中至少有其一成立：

$\gamma'_{rsc}(G)\geqslant 2n-|E(G)|-1 \quad (1)$，$\gamma'_{rsc}(\bar{G})\geqslant 2n-|E(\bar{G})|-1 \quad (2)$，

由定理 2.2知，以上两式均不成立，矛盾，故有 $\gamma'_{rsc}(G)+\gamma'_{rsc}(\bar{G})\leqslant (n-1)(8-n)/2$ 成立。

下面考虑上式中等号成立的情形。

一方面当 $G=P_4$ 或 K_1 时，注意到 $\bar{P}_4=P_4$ 和 $\bar{K}_1=K_1$，可见上式中等号成立。

另一方面有，

$\gamma'_{rsc}(G)+\gamma'_{rsc}(\bar{G})=(n-1)(8-n)/2=(2n-|E(G)|-2)+(2n-|E(\bar{G})|-2)$，由于前面的(1)式与(2)式均不成立，故 $\gamma'_{rsc}(G)=2n-|E(G)|-2$ 并且 $\gamma'_{rsc}(\bar{G})=2n-|E(\bar{G})|-2$。根据定理 2.2可知，$G$ 与 $\bar{G}$ 均为树。故 $\binom{n}{2}=|E(G)|+|E(\bar{G})|=2(n-1)$，即有 $n=1$ 或者 $n=4$。当 $n=1$ 时显然 $G=$

K_1；当 $n=4$时，注意到 G和 $\bar{G}$分别为树，易见 $G=P_4$为 4阶路。至此，定理证毕。

定理 3.2　对任意 $n\geqslant 2$阶图 G，若 $G\neq P_4$，则有 $\gamma'_{rsc}(G)+\gamma'_{rsc}(\bar{G})\leqslant(-n^2+9n-12)/2$。

证明　若 G与 $\bar{G}$都是树，则有 $\binom{n}{2}=|E(G)|+|E(\bar{G})|=2(n-1)(n\geqslant 2)$，即有 $n=4$，并且容易得到 $G=P_4$，这与定理的假设相矛盾。因此，G与 $\bar{G}$中至少有一个不是树。根据定理 2.2和推论 2.3，可得 $\gamma'_{rsc}(G)+\gamma'_{rsc}(\bar{G})\leqslant 4n-|E(G)|-|E(\bar{G})|-6=(-n^2+9n-12)/2$。证毕。

4　特殊图的反符号圈控制数

通常，要确定一般给定图的反符号圈控制数是很困难的，但对于一些特殊的图，比如完全图和无圈图等，容易确定它们的反符号圈控制数。

这里给出几类特殊图的反符号圈控制数。

定理 4.1　(1)对任意树 T，均有 $\gamma'_{rsc}(T)=|E(T)|$；

(2)对于圈 $C_n(n\geqslant 3)$有 $\gamma'_{rsc}(C_n)=\begin{cases}0, & \text{当 } n\text{为偶数时},\\ -1, & \text{当 } n\text{为奇数时};\end{cases}$

(3)对于完全图 $K_n(n\geqslant 2)$，有 $\gamma'_{rsc}(K_n)=2[n/2]-\binom{n}{2}$。

证明　(1)和(2)结论显然成立。

对于(3)，不难验证 $\pi(K_n)=\lfloor n/2\rfloor$，所以，

$\gamma'_{rsc}(K_n)=2\pi(K_n)-|E(K_n)|=\lfloor n/2\rfloor-\binom{n}{2}$。证毕。

图 $W_{n+1}=C_n\vee K_1$称为 $n+1$阶轮图$(n\geqslant 3)$。

定理 4.2　对任意整数 $n\geqslant 3$，有 $\gamma'_{rsc}(W_{n+1})=-2[(n-1)/4]-2$，其中 $[x]$表示不超过 x的最大整数。

证明　显然，当 $n=3$时，结论成立。下面假设 $n\geqslant 4$。

将 W_{n+1}分拆成一个 n阶圈 C_n和一个 $n+1$阶星 S_{n+1}，即有

$E(W_{n+1})=E(C_n)\cup E(S_{n+1})$。设 f为 W_{n+1}的一个最大的反符号圈控制函数，使得 $\gamma'_{rsc}(W_{n+1})=\sum_{e\in E(W_{n+1})}f(e)$。由于 W_{n+1}有 n个三角形 K_3作为它的子图(注意到 $n\geqslant 4$)，$f(C_n)\leqslant 0$，并且对于每一个三角形 $K_3\subseteq W_{n+1}$均有 $f(K_3)\leqslant -1$，则有

$$2\gamma'_{rsc}(W_{n+1})=2f(W_{n+1})=f(C_n)+\sum_{K_3\in W_{n+1}}f(K_3)\leqslant -n。$$

所以，$\gamma'_{rsc}(W_{n+1})\leqslant-\frac{n}{2}<-2[(n-1)/4]$，由引理 1.2(3)知 $\gamma'_{rsc}(W_{n+1})$为偶数，因此，$\gamma'_{rsc}(W_{n+1})\leqslant-2[(n-1)/4]-2$。

另一方面，下面分四种情况定义 W_{n+1}的一个反符号圈控制函数 f使得 $f(W_{n+1})\geqslant-2[(n-1)/4]-2$。设 W_{n+1}的中心点为 u，圈 C_n上的顶点依次为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$。设 $k\geqslant 1$为正整数。

(1)当 $n=4k$时，令

$f(v_iv_{i+1})=1,1\leqslant i\leqslant 2k$，$f(uv_{2k+2j})=1,1\leqslant j\leqslant k$，而其余的每条边 e，令 $f(e)=-1$。

(2)当 $n=4k+1$时，令

$f(v_iv_{i+1})=1,1\leqslant i\leqslant 2k$，$f(uv_{2k+2j})=1,1\leqslant j\leqslant k$，而其余的每条边 e，令 $f(e)=-1$。

(3)当 $n=4k+2$时，令

$f(v_iv_{i+1})=1,1\leqslant i\leqslant 2k+1$，$f(uv_{2k+2j+1})=1,1\leqslant j\leqslant k$，而其余的每条边 e，令 $f(e)=-1$。

(4) 当 $n=4k+3$ 时，令

$f(v_iv_{i+1})=1,1\leqslant i\leqslant 2k+1,f(uv_{2k+2j+1})=1,1\leqslant j\leqslant k+1$，而其余的每条边 e 令 $f(e)=-1$。

不难验证，对上述的情况(1)有 $\sum_{e\in E(W_{n+1})}f(e)=-2k-2=-2\cdot(n/4)=-n/2$。而对于其它三种情况(2)，(3)和(4)均有 $\sum_{e\in E(W_{n+1})}f(e)=-2k=-2[(n-1)/4]-2$。注意到，当 $n=4k$，k 为正整数时，$-n/2=-2[(n-1)/4]-2$，即当 $n\geqslant 4$ 时，均有 $\sum_{e\in E(W_{n+1})}f(e)=-2[(n-1)/4]-2$ 成立。故 $\gamma'_{rsc}(W_{n+1})\geqslant -2[(n-1)/4]-2$。综上，定理证毕。

对于联图的反符号圈控制数，类似可得

定理 4.3 (1) 对任意 n 阶图 G，有 $\gamma'_{rsc}(G\vee K_1)\geqslant\gamma'_{rsc}(G)-n$；

(2) 对任意 $n\geqslant 2$ 阶树 T，有 $\gamma'_{rsc}(T\vee K_1)=-1$。

证 略。

由定理4.3(2)和引理1.2(2)得

推论 4.4 对任意 n 阶森林 F，若 $\delta(F)\geqslant 1$，则 $\gamma'_{rsc}(F\vee K_1)=|E(F)|-n$。

参考文献：

[1] Bondy J A, Murty V S R. Gragh theory with applications[M]. Amsterdam: Elsevier, 1976.

[2] Xu Baogen. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2001, 239: 179-189.

[3] 徐保根. 关于图的反符号边控制数[J]. 华东交通大学学报，2007, 24(5): 144-147.

[4] 徐保根. 关于图的团符号控制数[J]. 系统科学与数学，2008, 28(3): 282-287.

[5] 张先迪. 图论及其应用[M]. 北京：高等教育出版社，2005. 127-131.

[6] Xu Baogen. On signed cycle domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2009, 309: 1 007-1 012.

[7] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京：科学出版社，2008. 163-164.

On Reverse Signed Cycle Domination in Graphs

ZHAO Hua, XU Bao-gen, ZHAO Jin-feng, SHUAI Chun-ping

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: We introduce the concept of reverse signed cycle domination in graphs. Let $G=(V,E)$ be a non-empty graph, a function $f:E\to\{+1,-1\}$ is said to be a reverse signed cycle domination function (RSCDF) of G if $\sum_{e\in E(C)}f(e)\leqslant 0$ holds for any induced cycle C of G, and $\gamma'_{rsc}(G)=\max\{\sum_{e\in E(G)}f(e)\mid f$ is an RSCDF of $G\}$ is called the reverse signed cycle domination number of G. We obtain bounds of $\gamma'_{rsc}(G)$, characterize all connected graphs G with $\gamma'_{rsc}(G)=-|E(G)|+2$, and determine the exact values of reverse signed cycle domination number for a graph and its complement and some special classes of graphs.

Key words: reverse signed cycle domination function; reverse signed cycle domination number; planar graph; wheel graph

(责任编辑：吴泽九)