

文章编号: 1005—0523(2009)02—0097—05

Marcinkiewicz 积分交换子的加权 Lipschitz 估计

郑雄军, 李水康

(江西师范大学 数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 讨论了齐性核的 Marcinkiewicz 积分 μ_Ω 和某一类加权 Lipschitz 空间的函数 b 生成的交换子 μ_Ω^b 的性质, 利用 sharp 极大函数技术, 证明 Marcinkiewicz 积分交换子 μ_Ω^b 是由 $L^p(\nu)$ 到 $L^q(\nu^{1-q})$ 的连续映照, 改进了一些已知结果。

关 键 词: 交换子; 加权 Lipschitz 空间; Marcinkiewicz 积分

中图分类号: O174.2

文献标识码: A

设 S^{n-1} 是赋予标准的 Lebesgue 测度 $d\sigma$ 欧氏空间 R^n ($n \geq 2$) 上的单位球面。 Ω 是 R^n 上的零次齐次函数且满足 $\int_{S^{n-1}} \Omega(x) dx' = 0$ 。

Stein 定义高维 Marcinkiewicz 积分算子如下:

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\text{其中 } F_t(f)(x) = \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y) dy$$

定义 Marcinkiewicz 积分交换子为:

$$\mu_\Omega^b(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{t,b}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$\text{其中 } F_{t,b}(f)(x) = \int_{|x-y| \leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} |b(x) - b(y)| f(y) dy$$

称 Ω 满足 Dini 型条件, 如果

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} \log \frac{1}{\delta} d\delta < \infty \quad (3)$$

其中 $\omega(\delta) = \sup \{ |\Omega(x) - \Omega(y)| : |x-y| < \delta, x, y \in S^{n-1} \}$ 。

Marcinkiewicz 积分交换子 μ_Ω^b 首先是由 Torchinsky 和 Wang^[1] 引进, 他们证明了当 $\Omega \in \text{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ ($0 < \alpha \leq 1$), 则 μ_Ω^b 是 $L^p(R^n)$ ($1 < p < \infty$) 上的有界算子。2002 年, Ding Lu 和 Yabuta^[2] 得到如下结果: 当 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$, $q > 1$ 时, μ_Ω^b 在 L^p 上有界。有关 Marcinkiewicz 积分交换子的结果详见文献 [3, 4]。

此外, Bloom^[5] 证明了一个交换子定理, 其内容如下: 设 λ, μ 为权, 则由 Hilbert 算子 H 及 $b \in \text{BMO}(R^n)$ 生成交换子 $[b, H]$ 是 $L^p(\mu)$ 到 $L^p(\lambda)$ 有界当且仅当 $b \in \text{BMO}_{(\mu, \lambda)}^{\frac{1}{p}}$ 。

收稿日期: 2008—09—25

基金项目: 江西省教育厅基金项目 (GJJ08169)

作者简介: 郑雄军 (1968—), 女, 江西上饶人, 教授, 研究方向为非线性泛函分析。

2007年, Hu和 Gu^[6]证明了交换子 $[b, T]$ 是 $L^p(\mu)$ 到 $L^p(\mu^{1-\alpha})$ 有界当且仅当 $b \in \text{Lip}_\alpha$, 其中 T 是奇异积分算子。受此文启发, 本文考虑了 Marcinkiewicz 积分交换子的加权的 Lipschitz 估计。本文的主要结果为:

定理 1 设 μ_n 为 (1) 定义的 Marcinkiewicz 积分, Ω 是零次齐次函数, $\int_{S^{n-1}} \Omega(x) dx' = 0$ 且满足 Dini 型条件 (3)。又设 $b(x) \in \text{Lip}_\alpha$, $v \in A_1(R^n)$, $1/q = 1/p - \beta/n$ 其中 $0 < \beta < 1$, $1 < p < q < \infty$ 。则交换子 T_n^b 是 $L^p(v)$ 到 $L^q(v^{1-\alpha})$ 上的有界算子。

1 预备知识和概念

设 v 是 R^n 上的非负的局部可积函数, 如果对于任意的球 $B \subset R^n$, 存在常数 C 使得

$$\frac{1}{|B|} \int_B v(x) dx \left[\frac{1}{|B|} \int_B (v(x))^{p'} dx \right]^{p-1} \leq C$$

则称 v 为 $A_p(R^n)$ ($1 < p < \infty$) 权。

对于任意的球 $B \subset R^n$, 如果存在常数 C 使得 $\frac{1}{|B|} \int_B v(x) dx \leq C v(x)$, a.e. $x \in R^n$, 则称 $v \in A_1(R^n)$ 权。

设 v 为局部可积函数, 如果对于任意的球 $B \subset R^n$, 存在常数 C 使得

$$\left[\frac{1}{|B|} \int_B (v(x))^q dx \right]^{1/q} \left[\frac{1}{|B|} \int_B (v(x))^{-p'} dx \right]^{1/p'} \leq C$$

其中 $1/p + 1/p' = 1$, 则称 v 属于 $A_{p,q}(1 < p, q < \infty)$ 。

极大函数 $Mf(x)$, sharp 极大函数 $M^\#f(x)$ 分别定义如下:

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$$

$$M^\#f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B| dy \sim \sup_{B \ni x} \inf_C \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - C| dy \text{ 其中 } f_B = \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy$$

设 f 为 R^n 上的局部可积函数, $1 \leq p \leq \infty$, $v \in A_\infty(R^n)$, 如果

$$\sup_B \frac{1}{v(B)^{\beta/n}} \left[\frac{1}{v(B)} \int_B |f(x) - f_B|^p v(x)^{1-p} dx \right]^{1/p} \leq C < \infty,$$

其中 $\sup$ 取遍 R^n 中所有的球 B , 则称 $f \in \text{Lip}_\beta^p v$ 。

为方便起见, 记 $\text{Lip}_\beta^p v \neq \text{Lip}_\beta^p v$ 。设 $v \in A_1(R^n)$, Garcia-Cuerva^[7] 证明了 $\|f\|_{\text{Lip}_\beta^p v}$ ($1 < p \leq \infty$) 与 $\|f\|_{\text{Lip}_\beta^p v}$ 等价, 此外, 定义 $M_\delta f(x) = M(|f|^\delta)^{1/\delta}(x)$, $M_\delta^\#f(x) = M^\#(|f|^\delta)^{1/\delta}(x)$ 。

引理 1 设 Marcinkiewicz 积分交换子 T_n^b 如 (2) 定义, Ω, b, v 满足定理 1 中的条件, 设 $1/q = 1/p - \beta/n$ 其中 $0 < \beta < 1$ 。又设 $0 < \delta < 1 < r < n/\beta$, 则存在常数 $C > 0$ 使得对于任意光滑函数 f 及几乎处处 $x \in R^n$, 有

$$M_\delta^\#(T_n^b(f))(x) \leq C v(x) \|b\|_{\text{Lip}_\beta^p v} (M_{\beta, v, r}^\Omega(f)(x) + M_{\beta, v, r}(f)(x) + M_{\beta, v, r}(\mu_\Omega(f))(x)),$$

其中

$$M_{\beta, v, r}(f)(x) = \sup_{B \ni x} \left[\frac{1}{v(B)^{1-\beta/n}} \int_B |f(y)|^r v(y) dy \right]^{1/r},$$

$$M_{\beta, v, r}^\Omega(f)(x) = \sup_{B \ni x} \left[\frac{1}{v(B)^{1-\beta/n}} \int_B |\Omega(x-y)f(y)|^r v(y) dy \right]^{1/r}.$$

证明 给定 $x \in R^n$, 令 $Q = Q(x_0, h)$ 且 $x \in Q$, $Q^* = Q(x_0, 4\sqrt{nh})$ 。以 h_Q^* 表示 b 在 Q^* 上的积分平均, 注意到

$$\begin{aligned} b(y)F_r(f)(y) - F_r(bf)(y) &= (b(y) - h_Q^*)F_r(f)(y) - F_r((b - h_Q^*)f)(y) \\ &= (b(y) - h_Q^*)F_r(f)(y) - F_r((b - h_Q^*)f\chi_{Q^*})(y) - F_r(b - h_Q^* f\chi_{Q^*})(y) \end{aligned}$$

记 $\mu_n((b-h_{Q^*})f\chi_{(Q^*)^c})(x_0) = \|F_t((b-h_{Q^*})f\chi_{(Q^*)^c})(x_0)\|_H$, 由三角不等式得

$$\begin{aligned} & |\mu_n^b(f)(y) - \mu_n((b-h_{Q^*})f\chi_{(Q^*)^c})(x_0)| \\ & \leq \| (b(y) - h_{Q^*})F_t(f)(y) \|_H + \| F_t((b-h_{Q^*})f\chi_{Q^*})(y) \|_H + \\ & \| F_t((b-h_{Q^*})f\chi_{Q^*})(y) - F_t((b-h_{Q^*})f\chi_{Q^*})(x_0) \|_H =: A(y) + B(y) + C(y). \end{aligned}$$

下面分别估计 $A(y)$, $B(y)$ 和 $C(y)$ 。对于 $A(y)$, 由 Hölder 不等式得:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [A(y)]^\delta dy \right)^{1/\delta} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - h_{Q^*}|^\delta |\mu_n(f)(y)|^\delta dy \right)^{1/\delta} \\ & \leq C \frac{1}{|Q|} \int_Q |b(y) - h_{Q^*}| |\mu_n(f)(y)| dy \\ & \leq \left(\frac{1}{|Q^*|} \int_Q |b(y) - h_{Q^*}|^{r'} |v(y)|^{1-r'} dy \right)^{1/r'} \left(\frac{1}{|Q^*|} \int_Q |\mu_n(f)(y)|^r |v(y)| dy \right)^{1/r} \\ & \leq C \frac{v(Q)}{|Q|} \|b\|_{Lip_{\beta, v} M_{\beta, v, r}(\mu_n(f))(x)} \leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, v} M_{\beta, v, r}(\mu_n(f))(x)}. \end{aligned}$$

对于 $B(y)$, 使用 Kolmogorov 不等式并注意到 μ_n 是弱 $(1, 1)$ 型的, 有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q [B(y)]^\delta dy \right)^{1/\delta} = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |\mu_n((b-h_{Q^*})f\chi_{Q^*})(y)|^\delta dy \right)^{1/\delta} \\ & \leq C \frac{1}{|Q^*|} \frac{\|\mu_n((b-h_{Q^*})f\chi_{Q^*})\|_\delta}{|Q^*|^{1/\delta-1}} \\ & \leq C \frac{1}{|Q^*|} \|\mu_n((b-h_{Q^*})f\chi_{Q^*})\|_{WL^1} \\ & \leq C \frac{1}{|Q^*|} \int_Q |b-h_{Q^*}| |f(y)| dy \\ & \leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, v} M_{\beta, v, r}(f)(x)}. \end{aligned}$$

记 $g = (b-h_{Q^*})f\chi_{(Q^*)^c}$, 则

$$\begin{aligned} C(y) &= \left(\int_0^\infty \left| \int_{|y-z| \leq t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} g(z) dz - \int_{|x_0-z| \leq t} \frac{\Omega(x_0-z)}{|x_0-z|^{n-1}} g(z) dz \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^\infty \left[\int_{|y-z| \leq t, |x_0-z| > t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} g(z) dz \right]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} + \left(\int_0^\infty \left[\int_{|x_0-z| \leq t, |y-z| > t} \frac{\Omega(x_0-z)}{|x_0-z|^{n-1}} g(z) dz \right]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_0^\infty \left[\int_{|y-z| \leq t, |x_0-z| \leq t} \left| \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} - \frac{\Omega(x_0-z)}{|x_0-z|^{n-1}} \right| g(z) dz \right]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} =: I(y) + I(y) + I(y). \end{aligned}$$

当 $x_0, x, y \in Q, z \in (Q^*)^c$ 时, 则 $|y-z| \sim |x_0-z| \sim |x-z|$ 。使用广义 Minkowski 不等式和广义 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} I(y) &= \left(\int_0^\infty \left[\int_{|y-z| \leq t < |x_0-z|} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} g(z) dz \right]^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} \frac{|\Omega(y-z)g(z)|}{|y-z|^{n-1}} \left(\int_{|y-z| \leq t < |x_0-z|} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dz \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} \frac{|\Omega(y-z)g(z)|}{|y-z|^{n-1}} \left(\frac{1}{|y-z|^2} - \frac{1}{|x_0-z|^2} \right)^{1/2} dz \\ &\leq C \int_{(Q^*)^c} \frac{|\Omega(y-z)g(z)|}{|y-z|^{n-1}} \frac{|x_0-y|^{1/2}}{|y-z|^{3/2}} dz \\ &\leq C \sum_{j=0}^\infty \int_{2^j Q^* \setminus 2^{j+1} Q^*} \frac{|b(z) - h_{Q^*}| |\Omega(y-z)f(z)|}{|x_0-z|^{n+1/2}} dz \\ &\leq C \sum_{j=0}^\infty \int_{2^j Q^* \setminus 2^{j+1} Q^*} |b(z) - h_{Q^*}| |\Omega(y-z)f(z)| dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j}}{|2^{j+1}Q^*|} \int_{2^{j+1}Q^*} |b(z) - b_{2^{j+1}Q^*}| |\Omega(y-z)f(z)| dz \\
&\quad + C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j}}{|2^{j+1}Q^*|} \int_{2^{j+1}Q^*} |b_{2^{j+1}Q^*} - b_{Q^*}| |\Omega(y-z)f(z)| dz \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j}{2}V(x)} \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)} + C \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) 2^{-\frac{j}{2}V(x)} \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)} \\
&\leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)},
\end{aligned}$$

其中 $|b_{2^{j+1}Q^*} - b_{Q^*}| \leq C(j+1)v(x)v(2^{j+1}Q^*) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega}}$

类似得 $I_2(y) \leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)}$ 。

下面估计 $I_3(y)$, 应用广义 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
I_3(y) &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q^*} \left| \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} - \frac{\Omega(x_0-z)}{|x_0-z|^{n-1}} \right| |(b(z) - b_{Q^*})f(z)| \left(\int_{|y-z| \leq t} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dz \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{j+1}Q^* \setminus 2^jQ^*} |(b(z) - b_{Q^*})f(z)| \left| \frac{\Omega(y-z) - \Omega(x_0-z)}{|y-z|^n} \right| dz \\
&\quad + C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{j+1}Q^* \setminus 2^jQ^*} |(b(z) - b_{Q^*})f(z)| \left| \frac{\Omega(x_0-z)}{|y-z|} \right| \left| \frac{1}{|y-z|^{n-1}} - \frac{1}{|x_0-z|^{n-1}} \right| dz \\
&= I_{31}(y) + I_{32}(y).
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
I_{31}(y) &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{2-j}) \int_{2^{j+1}Q^* \setminus 2^jQ^*} |(b(z) - b_{Q^*})f(z)| \frac{1}{|y-z|^n} dz \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{2-j}) \frac{1}{|2^{j+1}Q^*|} \int_{2^{j+1}Q^*} |(b(z) - b_{Q^*})f(z)| dz \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{2-j}) v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)} + C \sum_{j=0}^{\infty} \omega(2^{2-j}) (j+1) v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)} \\
&\leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)} \left(1 + \int_0^1 \frac{\omega(\rho)}{\rho} d\rho + \int_0^1 \frac{\omega(\rho)}{\rho} \log \frac{1}{\rho} d\rho \right) \\
&\leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)}.
\end{aligned}$$

因为 $x_0, x, y \in Q, z \in (Q^*)^c$ 时, 有 $|y-z| \sim |x_0-z| \sim |x-z|$ 则

$$I_{32}(y) \leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-j}}{|2^{j+1}Q^*|} \int_{2^{j+1}Q^*} |(b(z) - b_{Q^*})f(z)| dz \leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)}.$$

从而有 $I_3(y) \leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x)}$ 。

由 Hölder 不等式并综合 I_1, I_2, I_3 的估计得

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{|Q|} \int_Q [C(y)]^{\delta} dy \right|^{1/\delta} &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q C(y) dy \leq \frac{1}{|Q|} \int_Q (I_1(y) + I_2(y) + I_3(y)) dy \\
&\leq C v(x) \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} (M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f)(x) + M_{\beta, \nu}(f)(x))}.
\end{aligned}$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 根据文献 [7], 由 $v \in A_1(\mathbb{R}^n)$ 可知 $v^{1-q} \in A_q(\mathbb{R}^n)$, 对 $0 < \delta < 1 < r < p$ 利用引理 1 可得

$$\begin{aligned}
&\| \mu_{\Omega}^b(f)(x) \|_{L^{q(v^{1-q})}} \leq \| M_{\delta}(\mu_{\Omega}^b(f)) \|_{L^{q(v^{1-q})}} \leq \| M_{\delta}^{\#}(\mu_{\Omega}^b(f)) \|_{L^{q(v^{1-q})}} \\
&\leq C \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} (M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f) + M_{\beta, \nu}(f))} \| M_{\beta, \nu}(f) \|_{L^{q(v)}} + C \|b\|_{Lip_{\beta, \nu}^{\Omega} (M_{\beta, \nu}^{\Omega}(f) + M_{\beta, \nu}(f))} \| \mu_{\Omega}^b(f) \|_{L^{q(v)}}
\end{aligned}$$

$$\leq C \|b\|_{\text{Lip}_\beta^q(v)} \|f\|_{L^p(v)}.$$

参考文献:

- [1] Torchinsky A, Wang S L. A note on Marcinkiewicz integral[J]. Coll Math, 1993, 60: 235—243.
- [2] Ding Y, Lu S Z, Yabuta K. On commutator of Marcinkiewicz integrals with rough kernel[J]. Jour Math Anal Appl, 2002, 275: 60—68.
- [3] Hu G, Yan D. On the commutator of a homogeneous Marcinkiewicz integral[J]. Jour Math Anal Appl, 2003, 283: 351—361.
- [4] Lu S W, U H X. On the commutators of singular integrals related to block spaces[J]. Nagoya Math J, 2004, 173: 205—223.
- [5] Bloom S. A commutator theorem and weighted BMO[J]. Trans Amer Math Soc, 1985, 292: 103—122.
- [6] Hu B, Gu J. Necessary and sufficient conditions for boundedness of commutators with weighted Lipschitz function[J]. Jour Math Anal Appl, 2008, 340(1), 598—605.
- [7] Garcia-cuerva J, Rubio de francia J L. Weighted norm inequalities and related topics[M]. New York: North Holland Amsterdam, 1995.

Weighted Lipschitz Estimates for Commutator of Marcinkiewicz Integrals

ZHENG Xiong-jun, LI Shui-kang

(School of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: In this paper, the author discusses the properties of the commutator μ_b^h generalized by the Marcinkiewicz integral μ_h with homogeneous kernel and some weighted Lipschitz function b . By using the properties of the sharp maximal function, the $(L^p(v), L^q(v^{1-q}))$ -boundedness of the operator μ_h^b is established. Some known results are improved.

Key words: commutator; weighted Lipschitz spaces; Marcinkiewicz integral

(责任编辑:吴泽九)