文章编号:1005-0523(2009)02-0102-06

共形平坦 Lorentz空间具常平均曲率的一类超曲面

吴泽九

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:设 M是共形平坦 Lorentz空间 L_1^{n+1} 中具常平均曲率的完备类空超曲面,R与 r分别表示 L_1^{n+1} 的 Ricci曲率的上、下确界,$C=[2nr-(n+1)R]/[n(n-1)]$。如果 M的法向量是 L_1^{n+1} 的 Ricci主方向,则 (1) 当 M第二基本形式模长平方 $S<2\sqrt{n-1}C$时,M全脐;(2) 当 $S=2\sqrt{n-1}C$时,若 $n=2$,M是全脐超曲面;若 $n\geqslant 3$,M是双曲柱面。

关 键 词:共形平坦;常平均曲率;Ricci主方向

中图分类号:O186.12 **文献标识码**:A

设 M是 de Sitter空间 $S_1^{n+1}(c)$中具有常平均曲率的完备的类空超曲面。Goddard[1]提出了下列著名的猜想:$S_1^{n+1}(c)$中任一具常平均曲率的完备类空超曲面必全脐。Akutagawa[2] 和 Ramanathan[3] 研究了 Goddard猜想,并独立的得到了当 M的平均曲率 H满足 $H^2\leqslant c$,$n=2$或 $n^2H^2<4(n-1)c$,$n\geqslant 3$时 M全脐。C. Ouyang和 Z. Li[4] 得到在第二基本形式模长平方 $S\leqslant 2\sqrt{n-1}c$时超曲面 M的分类结果。本文继续对其进行研究,利用文[4]的方法,将这类超曲面的分类结果推广到共形平坦 Lorentz空间。

1 公式与引理

本文规定各种指标范围如下:$1\leqslant A,B,C,\cdots,\leqslant n+1$;$1\leqslant i,j,k,\cdots,\leqslant n$;不特别说明时,$\sum$ 表示对重复指标求和。设 L_1^{n+1} 是 $n+1$维的 Lorentz空间,M是 L_1^{n+1} 的完备类空超曲面。在 L_1^{n+1} 上选取局部标准正交标架场 $\{e_A\}$,使得限制在 M上,e_{n+1}与 M正交,$\{e_i\}$与 M相切。设 $\{\omega_A\}$是关于 $\{e_A\}$的对偶标架场,$\{\omega_{AB}\}$是 L_1^{n+1} 的联络形式。L_1^{n+1} 的伪黎曼度量为 $ds^2=\sum\varepsilon_A(\omega_A)^2$,其中 $\varepsilon_1=\cdots\varepsilon_n=1$,$\varepsilon_{n+1}=-1$。$L_1^{n+1}$ 的结构方程为[5]

$$d\omega_A=\sum\varepsilon_B\omega_{AB}\wedge\omega_B,\ \omega_{AB}+\omega_{BA}=0 \tag{1}$$

$$d\omega_{AB}=\sum\varepsilon_C\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}-\frac{1}{2}\sum K_{ABCD}\varepsilon_C\varepsilon_D\omega_C\wedge\omega_D \tag{2}$$

其中 K_{ABCD}是 L_1^{n+1} 的曲率张量分量。限制在 M上,有

$$\omega_{n+1}=0,\ \omega_{in+1}=\sum h_{ij}\omega_j \tag{3}$$

收稿日期:2008-12-28
基金项目:华东交通大学科研基金项目(06ZKJC04);江西省自然科学基金项目(0611009)

作者简介:吴泽九(1976-),男,江西会昌人,硕士,讲师。

$$d\omega_i = \sum \omega_{ij} \wedge \omega_j,\ \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \tag{4}$$

$$d\omega_{ij} = \sum \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2}\sum R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l \tag{5}$$

$$R_{ijkl} = K_{ijkl} - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) \tag{6}$$

其中 R_{ijkl}是 M的曲率张量分量。分别定义 h_{ijk}及 h_{ijkl}如下:

$$\sum h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum h_{ki}\omega_{kj} + \sum h_{jk}\omega_{ki} \tag{7}$$

$$\sum h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk} + \sum h_{ljk}\omega_{li} + \sum h_{ilk}\omega_{lj} + \sum h_{ijl}\omega_{lk} \tag{8}$$

则

$$h_{ijk} - h_{ikj} = -K_{n+1\,ijk} \tag{9}$$

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum h_{mi}R_{mjkl} + \sum h_{mj}R_{mikl} \tag{10}$$

将 $K_{n+1\,ijk}$看作是 $T^{\perp}M \otimes T^{*}M \otimes T^{*}M \otimes T^{*}M$截面,定义 $K_{n+1\,ijk}$共变导数 $K_{n+1\,ijkl}$为

$$\sum K_{n+1\,ijkl}\omega_l = dK_{n+1\,ijk} - \sum K_{n+1\,mjk}\omega_{mi} - \sum K_{n+1\,imk}\omega_{mj} - \sum K_{n+1\,ijm}\omega_{mk} \tag{11}$$

L_1^{n+1}是共形平坦的,所以

$$K_{ABCD} = \frac{1}{n-1}(\varepsilon_A\delta_{AC}K_{BD} - \varepsilon_A\delta_{AD}K_{BC} + \varepsilon_B\delta_{BD}K_{AC} - \varepsilon_B\delta_{BC}K_{AD})$$

$$- \frac{K}{n(n-1)}\varepsilon_A\varepsilon_B(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}) \tag{12}$$

其中 $K_{AB} = \sum \varepsilon_C K_{ACBC}$是 L_1^{n+1}的 Ricci张量分量,$K = \sum \varepsilon_A K_{AA}$是 L_1^{n+1}的数量曲率。

如果 M的法方向是 L_1^{n+1}的 Ricci主方向,则对任意 i有

$$K_{n+1\,i} = 0 \tag{13}$$

由 (11)~(13),对任意 i, j, k, l都有

$$K_{n+1\,ijk} = 0,\ K_{n+1\,ijkl} = 0 \tag{14}$$

引理 1[6]　设 $\{a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$是满足条件 $\sum_i a_i = 0$的 n个实数,则

$$\left|\sum_i a_i^3\right| \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\left(\sum_i a_i^2\right)^{3/2},$$

等式成立当且仅当 $a_1, \cdots, a_n$中至少有 $n-1$个彼此相等。

引理 2[7,8]　设 M是 Ricci曲率有下界的 n维完备黎曼流形,F为 M上有上界的 C^2函数,则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in M$,使得

$$\mathrm{Sup}F - \varepsilon < F(x),\ \|\nabla F\|(x) < \varepsilon, \triangle F(x) < \varepsilon。$$

2　主要结果

定理 1　设 M是共形平坦 $n+1$维 Lorentz空间 L_1^{n+1}的具有常平均曲率的完备类空超曲面,S表示 M第二基本形式模长的平方,R与 r分别表示 L_1^{n+1}的 Ricci曲率的上、下确界,$C = \frac{2nr-(n+1)R}{n(n-1)}$且 $C > 0$。如果 M的法方向是 L_1^{n+1}的 Ricci主方向,则

(1) $S < 2\sqrt{n-1}C$时,M是全脐超曲面,且等距于球面 $S^n(a)$,其中 $a = K_L - \frac{S}{n}$。

(2) $S = 2\sqrt{n-1}C$时,若 $n=2$, M是全脐的且等距于 $L^2(a)$,其中 $a = K_L - C$;若 $n \geqslant 3$, $M = H^1(u) \times S^{n-1}(v)$,其中 $u = C[1-(n-1)^{1/2}]$, $v = C[1-(n-1)^{-1/2}]$。

证明 因为 M的平均曲率 H为常数,所以

$$\sum h_{kkij}=0,\ \forall\ i\ j \tag{15}$$

由(9)(10)(15)有

$$\triangle h_{ij}=-\sum K_{n+1kikj}-\sum K_{n+1ijkk}+\sum h_{mk}R_{mijk}+\sum h_{im}R_{mkjk} \tag{16}$$

由(6)(14)(16)则有

$$\sum h_{ij}\triangle h_{ij}=\sum h_{ij}h_{mk}K_{mijk}+\sum h_{ij}h_{im}K_{mkjk}-trA^3\sum h_{ii}+S^2 \tag{17}$$

其中 A表示矩阵(h_{ij})。

选取适当的$\{e_i\}$,使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$。于是(17)改为

$$\sum h_{ij}\triangle h_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i\ j}(\lambda_i-\lambda_j)^2K_{ijij}-nH\sum_i\lambda_i^3+S^2 \tag{18}$$

令 $f^2=S-nH^2$,由于 L_1^{n+1}共形平坦且 $r\leqslant\varepsilon_AK_{AA}\leqslant R$,$(n+1)r\leqslant K\leqslant(n+1)R$,则

$$\frac{1}{2}\sum_{i\ j}(\lambda_i-\lambda_j)^2K_{ijij}=\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i\ j}(\lambda_i-\lambda_j)^2(K_{jj}+K_{ii}-\frac{K}{n})$$

$$\geqslant\frac{1}{2(n-1)}\sum_{i\ j}(\lambda_i-\lambda_j)^2[2r-\frac{1}{n}(n+1)R]=nCf^2 \tag{19}$$

不失一般性,假定 M的平均曲率 H非负。因为

$$\sum_i(\lambda_i-H)=0,\ \sum_i(\lambda_i-H)^2=f^2,\ \sum_i(\lambda_i-H)^3=\sum_i\lambda_i^3-3Hf^2-nH^3,$$

由引理 1有

$$\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}f^3\geqslant\sum_i\lambda_i^3-3Hf^2-nH^3 \tag{20}$$

所以

$$-nH\sum\lambda_i^3\geqslant-nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}f^3-3nH^2f^2-n^2H^4 \tag{21}$$

由(18)(19)(21)得

$$\sum h_{ij}\triangle h_{ij}\geqslant f^2[f^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hf+nC-nH^2] \tag{22}$$

因为

$$f^2-\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hf+nC-nH^2$$

$$=nC-\frac{n}{2\sqrt{(n-1)}}(f^2+nH^2)+\frac{1}{2\sqrt{n-1}}[(\sqrt{n-1}+1)f-(\sqrt{n-1}-1)\sqrt{n}H]^2$$

$$\geqslant nC-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(f^2+nH^2) \tag{23}$$

由(22)(23)则有

$$\sum h_{ij}\triangle h_{ij}\geq\frac{n}{2\sqrt{(n-1)}}f^2(2\sqrt{n-1}C-nH^2-f^2) \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\triangle f^2=\frac{1}{2}\triangle S=\sum(h_{ijk})^2+\sum h_{ij}\triangle h_{ij}\geqslant\frac{n}{2\sqrt{(n-1)}}f^2(2\sqrt{n-1}C-nH^2-f^2) \tag{25}$$

由(6)式

$$R_{ii}=\sum_j K_{ijij}+\sum_j(h_{ij})^2-nHh_{ii}$$

因此

$$R_{ii}=\frac{1}{n-1}\sum_{j(\neq i)}(K_{jj}+K_{ii}-\frac{K}{n})+\sum_{j(\neq i)}(h_{ij})^2+(h_{ij}-\frac{1}{2}nH)^2-\frac{1}{4}n^2H^2$$
$$\geqslant(n-1)C-\frac{1}{4}n^2H^2 \tag{26}$$

故 M的 Ricci曲率有下界。

给定正数 τ,令 $F=(f^2+\tau)^{1/2}$,由定理条件 $S\leqslant 2\sqrt{n-1}C$,故 F是有上界的 C^2 一函数,应用引理 2,$\forall\varepsilon>0$,$\exists x\in M$,使得

$$\mathrm{Sup}F-\varepsilon<F(x),\ \|\nabla F\|(x)<\varepsilon,\ \triangle f(x)<\varepsilon \tag{27}$$

对 F求微分及 Laplace算子有

$$F\triangle F+\|\nabla F\|^2=\frac{1}{2}\triangle f^2 \tag{28}$$

由(27)(28)有

$$\frac{1}{2}\triangle f^2(x)=F\triangle F(x)+\|\nabla f\|^2(x)<\varepsilon(\varepsilon+F) \tag{29}$$

选取数列 $\{\varepsilon_m\}$,使 $\{\varepsilon_m\}\to 0(m\to\infty)$,对每一个 m,存在在点 $x_m\in M$,使得(27)成立,而且 $\varepsilon_m[\varepsilon_m+F(x_m)]\to 0(m\to\infty)$。再由(27),$F(x_m)>\mathrm{Sup}F-\varepsilon_m$,$\{F(x_m)\}$是有界数列,因此 $\{F(x_m)\}$有极限,不妨设极限为 F_0,即 $F(x_m)\to F_0$,因此 $F_0\geqslant\mathrm{Sup}F$。故 $F_0=\mathrm{Sup}F$,再由 F的定义,有

$$f^2(x_m)\to f_0^2=\mathrm{Sup}f^2 \tag{30}$$

由(25)(29)有

$$\varepsilon_m[\varepsilon_m+F(x_m)]>\frac{1}{2}\triangle f^2(x_m)\geqslant\frac{m}{2\sqrt{n-1}}f^2(x_m)[2\sqrt{n-1}C-nH^2-f^2(x_m)]。$$

当 $m\to\infty$ 时,因此

$$0\geqslant\frac{n}{2\sqrt{n-1}}f_0^2[2\sqrt{n-1}C-nH^2-f_0^2] \tag{31}$$

下面分两种情形讨论:

(1)当 $S<2\sqrt{n-1}C$时,$f_0^2+nH^2<2\sqrt{n-1}C$,由(31)得 $f_0^2=0$,从而 $S=nH^2$,M全脐。由(6)式,M等距于球面 $S^n(a)$,其中 $a=K_L-\frac{S}{n}$。

(2)当 $S=2\sqrt{n-1}C$时,$f^2=2\sqrt{n-1}C-nH^2$是常数,由(24)(25)有

$$h_{ijk}=0,\ \sum h_{ij}\triangle h_{ij}=0 \tag{32}$$

所以(19)~(23)中不等号均成为等号。当(23)等号成立时

$$(\sqrt{n-1}+1)f-(\sqrt{n-1}-1)\sqrt{n}H=0 \tag{33}$$

此时 M不全脐,若不然有 $f=0$,由(33)知,$H=0$,从而 $S=0$,这与题设 $S=2\sqrt{n-1}C\neq 0$矛盾。因为(20)变为等式,由引理 1及 M不全脐,可假定 $\lambda_1\neq\lambda_2=\cdots=\lambda_n$。由于 $K_{ii}-r\geqslant 0$,$R-\varepsilon_AK_{AA}\geqslant 0$,当(19)等号成立时,有

$$\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2[(K_{jj}-r)+(K_{ii}-r)+\frac{1}{n}\sum_A(R-\varepsilon_AK_{AA})]=0,$$

所以

$$K_{11}=K_{22}=\cdots=K_{nn}=r,\ K_{11}=K_{22}=\cdots=K_{nn}=-K_{n+1n+1}=R,$$

于是 $\varepsilon_AK_{AA}=r=R$,$K=(n+1)R$。因为 L_1^{n+1} 共形平坦,所以在切空间 TL_1^{n+1} 中 e_A 与 e_B 所张成的非退化 2一平面的截面曲率为

$$K(e_A\wedge e_B)=\frac{1}{n-1}(\varepsilon_B K_{BB}+\varepsilon_A K_{AA}-\frac{K}{n})=C \tag{34}$$

此时 L_1^{n+1} 成为 de Sitter空间 $S_1^{n+1}(C)$。

在 $S_1^{n+1}(C)$ 上选取适当 $\{e_i\}$,使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$。(7)式中,令 $i=j$ 结合(32)有

$$0=d\lambda_i+2\sum_k h_{ki}\omega_{ki}=d\lambda_i+2\lambda_i\omega_{ii}=d\lambda_i,$$

因此 λ_i 为常数,再由(7)有

$$0=\lambda_i\omega_{ij}+\lambda_j\omega_{ji}=(\lambda_i-\lambda_j)\omega_{ij} \tag{35}$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$,由上式有

$$\omega_{12}=0 \tag{36}$$

由(5)(36)得

$$0=d\omega_{12}=\sum\omega_{1k}\wedge\omega_{k2}-\frac{1}{2}\sum R_{12kl}\omega_k\wedge\omega_l \tag{37}$$

如果对某一 k 使得 $\omega_{1k}\neq\omega_{k2}\neq 0$,则由(35)有 $\lambda_1=\lambda_k=\lambda_2$,这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾,因此由(37)有 $\sum R_{12kl}\omega_k\wedge\omega_l=0$,故

$$R_{1212}=0 \tag{38}$$

由(6)(34)(38)及题设 $S=2\sqrt{n-1}C$ 有

$$\lambda_1\lambda_2=C \tag{39}$$

$$\lambda_1^2+(n-1)\lambda_2^2=2\sqrt{n-1}C \tag{40}$$

再由(39)(40)有

$$\lambda_1^2=C\sqrt{n-1},\ \lambda_2^2=C/\sqrt{n-1} \tag{41}$$

因此 M是 de Sitter空间 $S_1^{n+1}(C)$ 中具有两个不同主曲率 λ_1, λ_2 且重数分别等于 1与 $n-1$ 的超曲面,由文[9]可知,M是双曲线柱面 $H^1(u)\times S^{n-1}(v)$,其中 $u=C[1-(n-1)^{1/2}]$, $v=C[1-(n-1)^{-1/2}]$。定理 1得证。

当外围空间 $L_1^{n+1}=S_1^{n+1}(c)$ 时,M的法方向是 $S_1^{n+1}(c)$ 的 Ricci主方向且 $R=r=nc$, $C=c$。由定理 1得

推论 1 设 M是 $S_1^{n+1}(c)$ 中的具常平均曲率 H的完备类空超曲面,则

(1) $S<2\sqrt{n-1}c$ 时,M是全脐超曲面且等距于球面 $S^n(c-\frac{S}{n})$;

(2) $S=2\sqrt{n-1}c$ 时,若 $n=2$,M是全脐的平坦超曲面;若 $n\geq 3$ 时,$M=H^1(u)\times S^{(n-1)}(v)$,其中 $u=c[1-(n-1)^{1/2}]$, $v=c[1-(n-1)^{-1/2}]$。

注:推论 1被文[4]所研究,因此定理 1是文[4]中结果的推广与改进。

参考文献:

[1]Goddard A J. Some remarks on the existence of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature[J]. Math Proc Cambrige Phil Soc, 1977, 82: 489－495.

[2]Akutagawa K. On space-like hypersurfaces with constant curvature in the de Sitter space[J]. Math Z, 1987, 196: 13－19.

[3]Ramanathan J. Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in a de Sitter space[J]. Indiana Univ Math J, 1987, 36: 349－359.

[4]Ouyang C. and Li Z. Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space[J]. Chinese Quart J Math, 2000, 15: 45－49.

[5]Ishihara T. Maximal spacelike submanifolds of a pseudo-Riemannian space of constant curvature[J]. Michigan Math J, 1988, 35(3): 345－352.

[6]Alencar H, Do Carmo M. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 120: 1 223—1 229.

[7]Omori H. Isometric immersion of Riemmanian manifolds[J]. J Math Soc Japan, 1967, 19: 205—214.

[8]Yau S T. Harmonic functions on complete Riemmanian manifolds[J]. Comm Pure and Appl Math, 1975, 28: 201—228.

[9]Abe N, Koike N and Yamaguchi S. Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form[J]. Yokohama Math J, 1987, 35: 123—136.

Some Hypersurfaces in a Conformally Flat Lorentzian Manifold with Constant Mean Curvature

WU Ze-jiu

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang, China, 330013)

Abstract: Let M be a complete hypersurface with constant mean curvature in a $n+1$-dimensional conformally flat Lorentzian manifold L_1^{n+1}. Let S stands for the square of the length of the second fundamental form of M and $C=[2nr-(n+1)R]/[n(n-1)]$, where R and r is the supremum and infimum of Ricci curvature of M respectively. Assume that the normal direction of M be the Ricci principal direction of L_1^{n+1}. (1) If $S<2\sqrt{n-1}C$, then M is a totally umbilical hypersurface; (2) If $S=2\sqrt{n-1}C$, then M is a totally umbilical hypersurface when $n=2$ and M is a hyperbolic cylinder when $n\geqslant 3$.

Key words: conformally flat; constant mean curvature; Ricci principal direction

(责任编辑:王全金)