第 26卷第 2期
2009年 4月

Vol 26 No 2
Apr，2009

文章编号：1005－0523(2009)02－0108－03

奇数阶完全图的因子分解与对称群

周尚超，邓毅雄

(华东交通大学，江西 南昌 330013)

摘要：F. Harary在[1]中提出如下一个未解决问题：那些有限置换群是完全图同构分解的因子对称群？对于 $n>1$。构造了 $2n+1$阶完全图 G的 n个不同的同构分解 $G^e=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$，其中 G_1是 2n个点的路的第 e对对称点和另 1个点连接得到的图。证明了 G的同构分解的因子对称群是 n阶循环群。

关 键 词：完全图；对称群；因子分解

中图分类号：O157　　　　**文献标识码**：A

本文所指的图均为无向简单图，文中未说明的符号和术语同于文献[1]。若 G_i($i=1,2,\cdots,n$)是图 G的生成子图，G_i与 G_j同构，当 $i\neq j$时 G_i与 G_j没有公共边，则称 $G=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$是 G的同构的因子分解。若 $\sigma\in A(G)$(G的自同构群)，σ保持 G的这个分解，即对于任意一个 G_i来说，σ要末是 G_i的自同构，要末是 G_i到 G_j的同构映射，则所有这样的 σ组成一个群，称为 G的同构分解的完全对称群，记为 B(G)，简记为 B。若 $\sigma\in A$，则 σ诱导出集合$\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$上的一个置换 s即 $s(G_i)=G_j$，当 σ是 G_i到 G_j的同构映射时，所有这样的 s组成群称为 G的同构分解的因子对称群，记为 C(G)，简记为 C。将$\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$记为$\{1,2,\cdots,n\}$。由此可知 C是 n个元素的集合$\{1,2,\cdots,n\}$上的置换群。

例 1 图 1给出 K_5的 2个同构的因子分解。$\sigma=(0)(1,2,3,4)$，$\tau=(0)(1,3)(2,4)$。σ是 $G_1(G_2)$到 $G_2(G_1)$的同构映射，即 $s=(G_1,G_2)=(1,2)$，τ是 $G_1(G_2)$的自同构。K_5的分解的完全对称群 $B(K_5)$是由 σ和 τ生成的 2面体群 $<\sigma,\tau>$，有 8个元素。$C(K_5)$是由 s生成的 2阶级循环群。

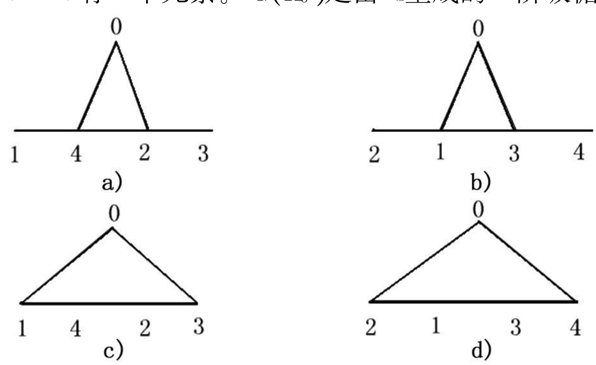

图 1 K_5的 2个分解

n个元素的集合上的置换群称为 n度的置换群。[1]中指出，2度的单位元素群(即只有一个元素的

收稿日期：2008－12－20

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10661007)

作者简介：周尚超(1948－)，男，云南蒙自人，教授，研究方向为图论与组合数学。

群)，不是完全图的因子对称群，对称群 S_2，S_3，S_4，S_5 是完全图的对称群。[1]中猜想，大多数的置换群(包括 S_n，$n\geq 6$)不是完全图的因子对称群。

令 $V=V(G)=\{0,1,2,\cdots,2n\}$。G是 $2n+1$阶完全图。当 $i\neq j$且 $i>0$，$j>0$时，定义边 (i,j)的长度为 $\min\{abs(i-j), 2n-abs(i-j)\}$，其中 abs表示绝对值。除掉与 0联结的边外，长度为 $l(l=1,2,\cdots,n-1)$的边有 2n条，长度为 n的 n条。边的总数为 $2n(n-1)+n=2n(2n-1)/2$所有这些边构成 G的 2n阶完全子图 H，$V(H)=\{1,2,\cdots,2n\}$。

令 $V(P_1)=\{1,2,\cdots,2n\}$，P_1的边集是 $E(P_1)=\{(1,2n),(2n,2),(2,2n-1),(2n-1,3),\cdots,(n,n+1)\}$。这里 P_1是 2n个点的路。P_1又可表示为 $P_1=[1,2n,2,2n-1,3,2n-2,\cdots,n,n+1]$。$P_1$(图 1中可看到 n=2时的 P_1)的构成，即从左到右，第 1点是 1，第 3点是 2，…，第 $2i+1$点是 $i+1$；从右到左，第 1点是 $n+1$，…，第 $2i+1$点是 $n+i+1$。$E(P_1)$也可这样来来定义：$(1,2n)$是第 1条边，设 (i,j)是第 k条边 $(k<2n-1)$。如果 $i<j$，则第 $k+1$条边是 $(j,i+1)$，否则第 $k+1$条边是 $(j,i-1)$。$n=4$时 $P_1=[1,8,2,7,3,6,4,5]$。边的长度从两边到中间是 $1,2,\cdots,n$。例如 $(1,8)$的长度是 1，$(8,2)$的长度是 2，$(2,7)$的长度是 3，等等。令 $\sigma=(1,2,3,\cdots,2n)$，$P_2=\sigma(P_1)$，即 P_2是把 P_1的点 i变为 $i+1$得到的图。如 $i=2n$，则变为 1。按此方法可得到 n个图 P_1，P_2，…，P_n，即 $P_i=\sigma(P_{i-1})$。σ不改变边的长度，因此容易得到如下的引理。

引理 1[3] $H=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_n$是 2n阶完全图的同构的因子分解。

在 P_1中，$P_1=[1,2n,2,2n-1,3,\cdots,n,n+1]$，把 $[1,n+1]$，$[n,2n]$，$[2,n+2]$，… $[i,i+n]$称为对称的点对。并把 $[i,i+n]$称为第 i对对称点。由此得知 $\tau=(1,n+1)(2,n+2)\cdots(n,2n)$是 P_i的自同构 $(i=1,2,\cdots,n)$。

设 M是 $\{1,2,\cdots,m\}$上的有限置换群。$M_i=\{f\mid f(i)=i,f\in M\}$，$i^M=\{j\mid$存在 $f\in M$，使 $f(i)=j\}$，根据有限群论，有如下的引理。

引理 2 $|M|=|M_i||i^M|$。

定理 设 G是 $2n+1$阶完全图，$n>1$，则存在 G的 n种同构的因子分解使得 G的同构分解的因子对称群是 n阶循环群。

证明 我们先给出 G的同构的因子分解，再证明这些分解的因子对称群是循环群。

$H=P_1\cup P_2\cup\cdots\cup P_n$是 G的 2n阶完全子图的同构的因子分解，将 0点与 P_1的一个对称点对 $[e,e+n](e=1,2,\cdots,n)$连接得图 G_1，$G_i=\sigma^{i-1}(G_1)$，$i=2,3,\cdots,n$。在 G_1，G_2，…，G_n中含有 2n条与 0连接的边，因此得到了 G的 n个不同的同构的因子分解。记为

$$G^e=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n。$$

图 2给出了 7阶完全图的分解 G^2

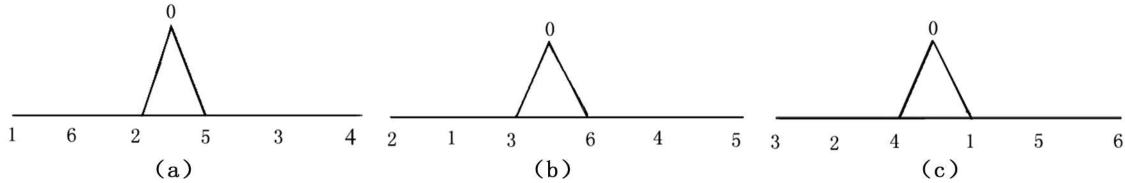

图 2 K_7的分解 G^2

当 e=1时，这就是：$G=K_{2n+1}$是 n个生成圈的和，这是一个熟知的结果[2]。下面我们证明，这几个分解中任何一个的因子对称群都是 n阶循环群。

设 $\sigma=(0)(1,2,\cdots,2n)$，根据 G_i的做法，易知 σ是 G_i到 G_{i+1}的同构映射 ($i+1$按模 n运算)，即 $s=(G_1,G_2,\cdots,G_m)\in C=C(G)$。设 $\tau=(0)(1,n+1)(2,n+2)\cdots(n,2n)\in A=A(G)$。则 τ是 G_i的自同构 $(i=1,2,\cdots,n)$，即 τ对应 C中的元素 t是 C的单位元。若将 $s=(G_1,G_2,\cdots,G_m)$用 $s=(1,2,\cdots,n)$表

示,则 $|1^C|=n$, $|C_1|=1$。根据引理 2, $|C|=n$, C是 n阶循环群。

系 n阶循环群是完全图 K_{2n}某个同构分解的因子对称群。

证明 设 $G^e=G_1\cup G_2\cup\cdots G_n$是定理证明中 G的一个分解,把顶点 0去掉我们就得到 $H=K_{2n}$的一个同构的因子分解,每个因子是 H的一条生成道路,类似定理 1的证明,这个分解的因子对称群是 n阶循环群。

参考文献:

[1] Harary F and Robinson R W. Isomorphic factorizations X: unsolved problems[J]. J Graph Theory, 1985, 9(1): 67-86.

[2] Harary F. 李慰萱译. 图论[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1980.

[3] 曾 伟. 完全图的路分解与因子对称群[J]. 华东交通大学学报, 2007, 24(5): 51-52.

On the Factorization of Isomorph in Odd Complete Graph

ZHOU Shang-chao, DENG Yi-xiong

(East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: F. Harary [1] posed an unresolved problem as follows: which finite permutation groups are the factor symmetric groups of isomorphic partition for complete graph? For any $n>0$, a factorization of K_{2n+1} is gained: $G^e=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_n$. It is proved that the cyclic group of order n is the symmetric group of the partition.

Key words: complete graph; symmetric group; factorization

(责任编辑:吴泽九)