

文章编号: 1005—0523(2009)02—0111—04

一维可压缩欧拉方程组解的爆破

朱旭生¹, 熊显萍¹, 傅 湧²

(1 华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌 330013; 2 宜春学院 数学与计算机科学学院 336000)

摘要:在假设某些初始数据较大的条件下, 研究由可压缩欧拉方程描述的多方气态理想流体。利用对称双曲型方程组解的存在性结论, 将该方程组化为对称双曲型方程组, 得到一维空间中可压缩欧拉方程的 Cauchy 问题的经典解关于时间的局部存在性; 并通过构造适当的泛函, 得到了其经典解在有限时间内必定发生爆破的结论。

关 键 词:可压缩欧拉方程; 爆破; 泛函方法

中图分类号: O175.28

文献标识码: A

考虑一维空间中理想气体的欧拉方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + p(\rho)_x = 0 \\ S_t + u S_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

的 Cauchy 问题, 其中 ρ, u, S, p 分别表示气体的密度, 速度, 熵和压强。状态方程为 $p = A \rho^\gamma e^S$, ($A > 0, \gamma > 1$), γ 为绝热指数。(1) 对应的初始数据为

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), u(x, 0) = u_0(x), S(x, 0) = S_0(x); \quad (2)$$

且在有界集 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq L\}$ 外 $\rho_0(x) = \rho_0, u_0(x) = \bar{u} = 0, S_0(x) = \bar{S}, \rho_0(x) > 0$ 。

对方程 (1) 的 Cauchy 问题的解的研究成果已有很多^[1,2], Thomas C. Sideris 在文 [3] 中已经得到了上述问题的三维空间的爆破性结论。本文在文献 [3] 的基础上, 对一维空间中大初始数据情形稍做修正, 用泛函方法证明在初始数据较大时整体解的不存在性结论。

1 结论及定理证明

记 $\sigma = p(\rho, S)^{1/2} = [A \gamma \bar{\rho}^{\gamma-1} e^{\bar{S}}]^{1/2}$, 取 $L > 0$, 定义 $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \rho u(x, t) dx$, $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\rho(x, t) - \bar{\rho}] dx$, $N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (p^{1/\gamma} - \bar{p}^{1/\gamma}) dx$, $B(t) = (L + \sigma t)^2 [M(0) + \bar{\rho} |A(t)|]$, $A(t) = (-L - \sigma t, L + \sigma t)$, $|A(t)|$ 表示 $A(t)$ 的长度, 即 $|A(t)| = 2(L + \sigma t)$ 。

首先, 对初值问题 (1) (2) 关于时间的局部存在性, 我们有以下引理

收稿日期: 2008—11—20

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10661007); 江西省自然科学基金项目 (2007GZS0811)

作者简介: 朱旭生 (1968—), 男, 江西高安人, 副教授, 研究方向为偏微分。

引理 1 如果 $(\rho_0 - \rho_{\text{u}}, S_0 - \bar{S}) \in H^3(R)$, 则问题 (1)(2) 存在局部解 (ρ, u, S) 且 $(\rho - \rho_{\text{u}}, S - \bar{S}) \in C([0, T], H^3(R)) \cap C^1([0, T], H^2(R))$ 。

证明 令 $\rho = \rho - \rho_{\text{u}} = \text{u} - \bar{\text{u}}, S = S - \bar{S}$ 引入变量 $\pi = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{A\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}s}$, 令 $\pi = \pi - \bar{\pi}$, 可将方

程 (1) 化为对称双曲型方程组

$$\begin{cases} e^{s/\gamma} [u_t + (u + \bar{u})\pi_x] + \frac{\gamma-1}{2} \pi e^{s/\gamma} u_x = 0 \\ [u + (u + \bar{u})u_x] + \frac{\gamma-1}{2} e^{s/\gamma} \pi \pi_x = 0, (x, t) \in R \times R_+ \\ S_t + (u + \bar{u})S_x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

相应初始数据为

$$\pi(x, 0) = \pi_0(x) - \bar{\pi} = \frac{2}{\gamma-1} \sqrt{A\gamma} [\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}(x) e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}S_0(x)} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}\bar{S}}], u(x, 0) = u_0(x), S(x, 0) = S_0(x) - \bar{S} \quad (4)$$

为了方便, 将 (3) 记为

$$P^0(V) \partial_t V + P(V) \partial_x V = 0 \quad (5)$$

$$\text{其中 } V = (\pi, u, S)^T, P^0(V) = \begin{bmatrix} e^{s/\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P(V) = \begin{bmatrix} e^{s/\gamma}(u + \bar{u}) & \frac{\gamma-1}{2} \pi e^{s/\gamma} & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2} \pi e^{s/\gamma} & (u + \bar{u}) & 0 \\ 0 & 0 & (u + \bar{u}) \end{bmatrix}, \text{其初始数}$$

据为

$$V(0) = (\pi(0), u(0), S(0))^T \quad (6)$$

利用对称双曲型方程组 Cauchy 问题解的局部存在性定理^[4], 我们得到 (5)(6) 的解 $(\pi, u, S)^T \in C([0, T_{\text{ex}}], H^3(R) \cap C^1([0, T_{\text{ex}}], H^2(R)))$, 即 $(\pi, u, S)^T$ 为时间 $[0, T_{\text{ex}}]$ 内 (3) 的光滑解。从而相应地 $(\rho - \rho_{\text{u}}, S - \bar{S}) \in C([0, T], H^3(R)) \cap C^1([0, T], H^2(R))$ 。

其次, 解具有有限传播速度的性质, 即

引理 2^[5] 假设 $(\rho_0 - \rho_{\text{u}}, S_0 - \bar{S}) \in H^3(R)$, 且对任意 $T > 0$, $(\rho, \text{u}, S) \in H^3$ 是 Cauchy 问题在 (1)(2) 的解且满足 $(\rho - \rho_{\text{u}}, S - \bar{S}) \in C([0, T], H^3(R)) \cap C^1([0, T], H^2(R))$, 则 $(\rho, \text{u}, S)(x, t) \equiv (\rho_0, \bar{S})$, 其中 $(x, t) \in \{(y, s) : y < -L - \sigma s \text{ 或 } y > L + \sigma s, 0 < s < T\}$ 。

我们有以下主要结论

定理 假设 $(\rho, \text{u}, S) \in H^3$ 是 Cauchy 问题 (1), (2) 的解, 且满足 $(\rho - \rho_{\text{u}}, S - \bar{S}) \in C([0, T], H^3(R)) \cap C^1([0, T], H^2(R))$ 。如果

$$N(0) \geq 0, F(0) > 1/B \quad (7)$$

这里 $B = \int_0^{+\infty} \frac{1}{B(t)} dt$ 则经典解必定在有限时间内爆破。

证明 我们先证明 $B = \int_0^{+\infty} \frac{1}{B(t)} dt$ 收敛。

注意到 $|A(t)| = 2(L + \sigma t) = A(0) + 2\sigma t$

$$M(0) + \rho A(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_0(x) - \rho) dx + \rho \cdot 2L = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) dx > 0,$$

故

$$\begin{aligned} B(t) &= (L + \sigma t)^2 (M(0) + \rho |A(t)|) \\ &= (L + \sigma t)^2 (M(0) + 2\rho(L + \sigma t)) = (L + \sigma t)^2 \left(\int_{-L}^L \rho_0(x) dx + 2\rho\sigma t \right), \end{aligned}$$

从而, $B = \int_0^{+\infty} \frac{1}{B(t)} dt$ 收敛。

假设 (ρ, u, S) 是方程在时间区间 $[0, t)$ 的解, 由方程 (1) 得

$$M'(t) = - \int_{-L}^L (\rho u)_x dx = 0$$

$$\text{即} \quad M(t) = M(0) \quad (8)$$

又由 $N'(t) = \int_{-L}^L -(\rho u e^{S/\gamma})_x dx = 0$, 得

$$N(t) = N(0) \quad (9)$$

由方程 (1) 并作分部积分, 得

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_{-L}^L x(\rho u)_t dx = - \int_{-L}^L x[(\rho u)_x u + \rho(\rho^{-1} p_x + (u u_x))] dx \\ &= - \int_{-L}^L \operatorname{div}[(xu)(\rho u) + x(p - \bar{p})] dx + \int_{-L}^L [\rho u^2 + (p - \bar{p})] dx \\ &= \int_{-L}^L [\rho u^2 + (p - \bar{p})] dx \end{aligned} \quad (10)$$

由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L p dx &= A \int_{-L}^L \rho^\gamma e^S dx \geq A(2L + 2\sigma t)^{1-\gamma} \left(\int_{-L}^L \rho e^{S/\gamma} dx \right)^\gamma \\ &\geq A(2L + 2\sigma t)^{1-\gamma} (N(0) + (2L + 2\sigma t) \rho e^{\bar{S}/\gamma})^\gamma \\ &\geq \bar{p}(2L + 2\sigma t) = \int_{-L}^L \bar{p} dx \end{aligned}$$

我们得到

$$F'(t) = \int_{-L}^L \rho u^2 + (p - \bar{p}) dx \geq \int_{-L}^L \rho u^2 dx \quad (11)$$

由有限传播速度的性质及 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$F(t)^2 = \left(\int_{-L}^L x \cdot \rho u dx \right)^2 \leq \left(\int_{-L}^L x^2 \rho dx \right) \left(\int_{-L}^L \rho u^2 dx \right) \quad (12)$$

又

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L x^2 \rho dx &\leq (L + \sigma t)^2 \int_{-L}^L \rho dx = (L + \sigma t)^2 (M(t) + \int_{-L}^L \rho dx) \\ &= (L + \sigma t)^2 (M(0) + \int_{-L}^L \rho dx) = (L + \sigma t)^2 (M(0) + \rho |A(t)|) \end{aligned} \quad (13)$$

由 (11)~(13), 得

$$\begin{aligned} F'(t) &\geq \frac{F(t)^2}{B(t)}, \\ \text{即} \quad \frac{F'(t)}{F^2(t)} &\geq \frac{1}{B(t)} \end{aligned} \quad (14)$$

(14) 式在 $[0, t]$ 上积分得到

$$\frac{1}{F(0)} - \frac{1}{F(t)} \geq \int_0^t \frac{1}{B(s)} ds$$

故由 (7), 必存在 T 使得当 $t \rightarrow T^-$ 时, 有

$$F(t) \geq \frac{1}{\frac{1}{F(0)} - \int_0^t \frac{1}{B(s)} ds} \rightarrow \infty.$$

从而经典解不可能整体存在,即在有限时间内爆破。

参考文献:

- [1] Serge A. Blow up for nonlinear hyperbolic equations[M]. Boston: Birkhäuser Press 1995.
- [2] Liu Taiping Yang Tong Compressible euler equations with vacuum[J]. J D Equations 1997, 140, 223—237.
- [3] Sideris T C. Fomation of singularities in three-dimensional compressible fluids[J]. Commun Phys 1985, 101, 475—485.
- [4] Kato T. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems[J]. Arch Rational Mech Anal 1975, 58, 181—205.
- [5] Sideris T C. Fomation of singularities of solutions to nonlinear hyperbolic equations[J]. Arch Ration Mech Anal 1984, 86 (4), 369—381.

Blow up of Solutions to the One-dimensional Compressible Euler Equations

ZHU Xu-sheng¹, XIONG Xian-ping¹, FU Yong²

(1. School of Basic Sciences East China Jiaotong University Nanchang 330013, China; 2. School of Mathematics and Computer Science Yichun university Yichun 336000, China)

Abstract: The initial value problem for one-dimensional compressible Euler equations of a polytropic ideal fluid is investigated in this paper. the local existence of the classical solution for Cauchy problem is obtained by utilizing the theory of the Cauchy problem for quasilinear symmetric hyperbolic systems. Furthermore, by functional methods, the classical solution is proved to be blowed up in finite time provided some initial data is sufficiently large.

Key words: the compressible Euler equations; blowup; functional methods

(责任编辑:吴泽九)