第26卷第3期 华东交通大学学报 Vol.26 No.3
2009年6月 Journal of East China Jiaotong University Jun.,2009

文章编号:1005-0523(2009)03-0092-03

圈 C_n 与树 T_k 生成的单圈图的优美性及其它标号

宋庆华

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:$C_n\cup T_k$ 是由圈 C_n 与树 T_k 生成的单圈图,证明了当 $n=3,4,6$ 时圈 C_n 与鞭炮树 T_k 生成的单圈图的优美性,以及给出了 T_k 分别为鞭炮树、毛毛虫时单圈图 $C_n\cup T_k$ 的一些其它标号:序列标号和调和标号。

关 键 词:单圈图;鞭炮树;优美性;标号

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

图的标号是指对图的每一个顶点指定标号(整数值),每条边的标号由其两端点的标号通过某种函数关系而得到,同时所有顶点和边的标号还满足其他某些约束条件。根据约束条件的不同,定义了优美标号,调和标号以及序列标号等十余种不同的标号。只有一个圈的图即边数等于顶点数的连通图图称为单圈图。Truszczy nski[1]猜想除 $C_n(n\equiv 1 or 2(\mathrm{mod}4))$外,所有的单圈图都是优美的。文献[2]证明了只要圈的长度在1或2(mod4)中选取合适则图是优美的。本文将介绍圈与树生成的单圈图的优美性及其它标号证明。

下面,先讨论通过粘接圈 C_n 上的一点与鞭炮树 T_k 的端点而生成的单圈图的优美性。首先对鞭炮树的顶点编号顺序做一个规定:先标一个轴上的点 v_1,再标一个左(或右)悬点 v_2,然后标一个轴上的点 v_3,再标一个右(或左)悬点 v_4,……,依次类推。如图1,鞭炮树的顶点编号顺序为:

1 主要结果及证明

单圈图 $C_3\cup T_k$ 是通过粘接鞭炮树 T_k 的端点与圈 C_3 上一点生成的。

定理1 由圈 C_3 与鞭炮树 T_k 生成的单圈图 $C_3\cup T_k$ 是优美的。

证明 $C_3\cup T_k$ 的总的顶点数为 $n=k+3-1=k+2$。首先定义圈 C_3 上的顶点标号为 $0,n,n-1$;鞭炮树上的顶点标号记为 $\theta(V_i)$;圈与鞭炮树的粘接点的顶点标号定义为0。

当时 $n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$时,

$$\theta(v_i)=\begin{cases} n-(i+3)/2 & i=1,5,9,\cdots,n-3\\ i/2 & i=2,6,10,\cdots,n-6\\ (i+1)/2 & i=3,7,11,\cdots,n-5\\ n-(i+2)/2 & i=4,8,12,\cdots,n-4\end{cases}$$

当时 $n\equiv 1(\mathrm{mod}4)$时,

$$\theta(v_i)=\begin{cases} n-(i+3)/2 & i=1,5,9,\cdots,n-4\\ i/2 & i=2,6,10,\cdots,n-3\\ (i+1)/2 & i=3,7,11,\cdots,n-6\\ n-(i+2)/2 & i=4,8,12,\cdots,n-5\end{cases}$$

当时 $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$时,

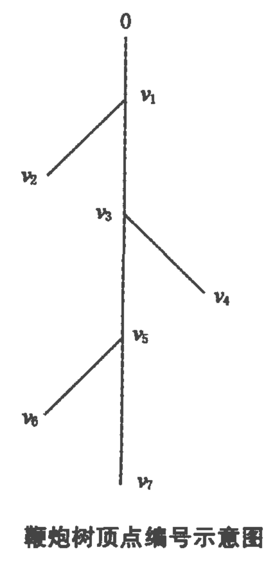

图1 鞭炮树顶点编号示意图

收稿日期:2009-03-15

基金项目:江西省自然科学基金项目(0611009)

作者简介:宋庆华(1976-),女,山东成武人,讲师。

$$\theta(v_i)=\begin{cases} n-(i+3)/2 & i=1,5,9,\cdots,n-5 \\ i/2 & i=2,6,10,\cdots,n-4 \\ (i+1)/2 & i=3,7,11,\cdots,n-3 \\ n-(i+2)/2 & i=4,8,12,\cdots,n-6 \end{cases}$$

当时 $n\equiv3(\bmod 4)$时,

$$\theta(v_i)=\begin{cases} n-(i+3)/2 & i=1,5,9,\cdots,n-6 \\ i/2 & i=2,6,10,\cdots,n-5 \\ (i+1)/2 & i=3,7,11,\cdots,n-4 \\ n-(i+2)/2 & i=4,8,12,\cdots,n-3 \end{cases}$$

下面证明当 $n\equiv0(\bmod 4)$时,$C_3\cup T_k$ 是优美的。这时 $C_3\cup T_k$ 的顶点标号集 θ 为:

$$\begin{aligned}
&\{n-(i+3)/2 \mid i=1,5,9,\cdots,n-3\} && \theta_1\\
&\cup\{i/2 \mid i=2,6,10,\cdots n-6\} && \theta_2\\
&\cup\{(i+1)/2 \mid i=3,7,11,\cdots n-5\} && \theta_3\\
&\cup\{n-(i+2)/2 \mid i=4,8,12,\cdots n-4\} && \theta_4\\
&\cup\{0,n,n-1\} && \theta_c\\
&=\{n-2,n-4,n-6,\cdots,n/2\} && \theta_1\\
&\cup\{1,3,5,7,\cdots,n/2-3\} && \theta_2\\
&\cup\{2,4,6,\cdots,n/2-2\} && \theta_3\\
&\cup\{n-3,n-5,n-7,\cdots,n/2+1\} && \theta_4\\
&\cup\{0,n,n-1\} && \theta_c\\
&=\{1,2,3,\cdots,n/2-2,n/2,n/2+1,\cdots,n-5,n-4,n-3,n-2\}\\
&\cup\{0,n,n-1\}\\
&=\{0,1,2,\cdots,n\}-\{n/2-1\}
\end{aligned}$$

所以 n 个顶点的标号互不相同,且 $\max\{\theta(v)\mid v\in V(G)\}=|E(G)|$。

根据鞭炮树顶点的编号规则,则 $C_3\cup T_k$ 的诱导边标号集 θ' 为:

$$\begin{aligned}
&\{|\theta_1-\theta_2|\}\cup\{|\theta_1-\theta_3|\}\cup\{|\theta_3-\theta_4|\}\cup\{|\theta_3-\theta_5|\}\cup\{n-2-0\}\cup\{1,n,n-1\}\\
&=\{n-3,n-7,n-11,\cdots,5\}\cup\{n-4,n-8,n-12,\cdots,2\}\\
&\cup\{n-5,n-9,n-13,\cdots,3\}\cup\{n-6,n-10,n-14,\cdots,4\}\\
&\cup\{1,n,n-1,n-2\}\\
&=\{1,2,3,\cdots,n\}
\end{aligned}$$

所以 n 条边的标号互不相同。

类似可证,$n\equiv1(\bmod 4)$,$n\equiv2(\bmod 4)$,$n\equiv3(\bmod 4)$时,上述标号也是优美标号。因此,圈 C_3 与鞭炮树 T_k 生成的单圈图 $C_3\cup T_k$ 是优美的。

同理可证以下两个定理:

定理 2　由圈 C_4 与鞭炮树 T_k 生成的单圈图 $C_4\cup T_k$ 是优美的。

定理 3　由圈 C_6 与鞭炮树 T_k 生成的单圈图 $C_6\cup T_k$ 是优美的。

下面研究这些图是否还有其它的标号。

引理 1[3]　如果图 G 有平衡标号,则特征 k 等于标号为 1 的诱导边端点标号中较小的那一个。

推论 1　单圈图 $C_4\cup T_k$ 的优美标号为平衡标号,其中 T_k 为鞭炮树,k 等于标号为 1 的诱导边顶点标号中较小的那一个。

证明　当 $n\equiv0(\bmod 4)$时,根据 $C_4\cup T_k$ 鞭炮树顶点的编号规则,根据 $C_4\cup T_k$ 的优美标号定义,可知边(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5),(v_5,v_6),(v_5,v_7)及当 $l\geqslant4$ 时所有的诱导边为

$$(v_{2l-1}, v_{2l} = ((i+3)/2, n-(i+4)/2)$$
$$(v_{2l-1}, v_{2l+1} = ((i+3)/2, n-(i+5)/2)$$
$$(v_{2l+1}, v_{2l+1} = (n-(i+5)/2, n-(i+2)/2)$$

这时 k 取 $(i+2)/2l|_{i=n-6}=n/2-2$，显然所有诱导边的端点总是一端大于 k，一端小于(或等于) k。所以单圈图 $C_4\cup T_k$ 的优美标号为平衡标号。

推论2 由圈 C_4 与毛毛虫 T_k 生成的单圈图的优美标号为平衡标号，其中 k 等于标号为1的诱导边顶点标号中较小的那一个。

证明 如果图 G 有平衡标号 θ，其特征为 k，则一定存在边 $e=(u_0,v_0)\in E(G)$，使 $\theta(u_0)=k,\theta(v_0)=k+1$。因此，图 G 一定存在一个二分划 (V_1,V_2)，使得 $\theta(u)\leqslant k$ 时，$u\in V_1$；$\theta(v)>k$ 时，$v\in V_2$，这就是平衡二分划。对于单圈图 $C_4\cup T_k$ 的优美标号，可以用图2来表示它的平衡二分划：

图2左边的顶点属于 V_1，右边顶点属于 V_2。由于前已证

$$n-r_2-r_4-\cdots-r_{2l}-(l+3)-(r_1+r_3+r_5+r_{2l-1}+l)=1$$

即 $r_1+r_3+r_5+r_{2l-1}+l=k$，有 $\theta(u)\leqslant k$ 时，$u\in V_1$；$\theta(v)>k$ 时，$v\in V_2$，故由圈 C_4 与毛毛虫 T_k 生成的单圈图的优美标号为平衡标号。

类似推论1和推论2的证明，可得推论3。

推论3 单圈图 $C_6\cup T_k$ 的优美标号为平衡标号，其中 T_k 为鞭炮树和毛毛虫，k 等于标号为1的诱导边顶点标号中较小的那一个。

定理4 单圈图 $C_4\cup T_k$(其中 T_k 是鞭炮树)是序列的。

证明 令 θ 是特征为 k 的单圈图 $C_4\cup T_k$ 的平衡标号，设顶点总数即边的总数为 n，那么在 $C_4\cup T_k$ 上构造一个函数 g，如下：

$$g(v)=\begin{cases}\theta(v) & 0\leqslant\theta(v)\leqslant k\\ n-\theta(v)+k+1 & k+1\leqslant\theta(v)\leqslant n\end{cases}$$

容易验证，g 是 $C_4\cup T_k$ 的序列标号。

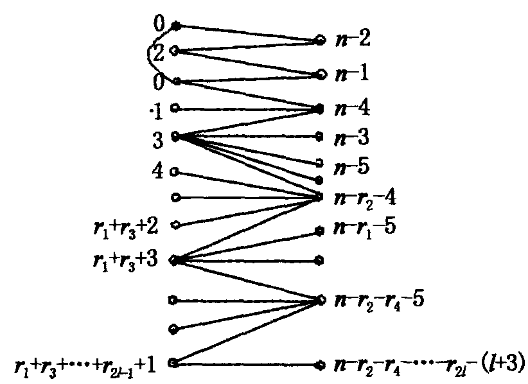

图2 单圈图 $C_4\cup T_k$ 的优美标号

引理2[3] 任何一个具有序列标号的图都是调和标号。

推论4 单圈图 $C_4\cup T_k$(其中 T_k 是鞭炮树)是调和的。

证明 对 $C_4\cup T_k$ 的序列标号对 q 取模，就可得到该图的调和标号。

定理5 由圈 C_4 与毛毛虫 T_k 生成的单圈图的优美标号是序列标号。

证明 与定理4的证明类似，由推论2知由圈 C_4 与毛毛虫 T_k 生成的单圈图的优美标号为平衡标号，设顶点总数为 n，只要在其平衡标号上构造一个函数 g：

$$g(v)=\begin{cases}\theta(v) & 0\leqslant\theta(v)\leqslant k\\ n-\theta(v)+k+1 & k+1\leqslant\theta(v)\leqslant n\end{cases}$$

可以验证 g 就是 $C_4\cup T_k$ 的序列标号。

由定理5及引理2得

推论5 由圈 C_4 与毛毛虫 T_k 生成的单圈图的优美标号是调和标号。

参考文献：

[1] Liu Y. Crowns graphsare harmonious graphs[J]. Hunan Annals Math, 1996, 16: 125-128.
[2] 高印芝. 图的优美性(I)[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 1999, 23(1): 6-11.
[3] 马克杰. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
[4] 高振滨, 卜长江. 关于一类单圈图优美性的证明[J]. 哈尔滨船舶工程学院学报, 1993, 14(4): 75-78. (下转第97页)

[3] 吴跃生.第二类 Stirling 数的又一个恒等式[J].华东交通大学学报,2007,24(2):146-147.
[4] 吴跃生.第二类 Stirling 数 $S_2(n,n-6)$的一个公式[J].华东交通大学学报,2008,25(4):97-99.

A Formula of $S_2(n,n-k)$ of the Second Kind Stirling Numbers

WU Yue-sheng

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we give a general definition of the Stirling numbers of the second kind. Then we obtain a more general form of the Stirling numbers of the second kind.

Key words: combinations; Stirling numbers of the second kind; general Stirling number of the second kind

(责任编辑:吴泽九)

(上接第94页)

On the Gracefulness of Graphs $C_n \cup T_k$

SONG Qing-hua

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong university, Nanchang 330013, China)

Abstract: $C_n \cup T_k$ is composed of cycle C_n and tree T_k. This paper gives the graceful labelings which are composed of unicyclic graph and firecracker-tree when $n=3,4,6$. Other labelings such as sequential labeling, harmonious labeling are given about $C_n \cup T_k$, when T_k is a firecracker tree and a caterpillar.

Key words: unicyclic graph; firecracker tree; gracefulness; labeling

(责任编辑:吴泽九)