文章编号:1005-0523(2009)03-0095-03

第二类Stirling数 $S_2(n,n-k)$的一个公式

吴跃生

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:本文给出了广义第二类Stirling数的一个定义,并由此得到一个有关第二类Stirling数的一个更一般公式。

关　键　词:组合;第二类Stirling数;广义第二类Stirling数
中图分类号:O157　　　　文献标识码:A

表述主要结果之前,首先给出一些定义和符号。

定义1　从 n 个不同事物中每次取出 m 个的组合数,记作 $C(n,m)$。

定义2　含有 n 个元素的一个集合分成恰好有 r 个非空子集合的分拆数目就叫做第二类Stirling数,并记作 $S_2(n,r)$,对于 $n=r=0$,定义 $S_2(0,0)=1$ 及 $n<r$,$S_2(n,r)=0$。

定义3　含有 n 个元素的一个集合分成恰好有 r 个至少都有 t 个元素的子集合的分拆数目就叫做广义第二类Stirling数,并记作 $S_{t+1}(n,r)$。

对于集合 x,我们用 $|x|$ 表示 x 的基数。

引理1[1]　当 $n\geqslant1$ 时,　$S_2(n,0)=0,S_2(n,1)=1,S_2(n,1)=2^{n-1}-1,S_2(n,n-1)=C(n,2),S_2(n,n)=1$。

引理2[1]　当 $n\geqslant4$ 时,$S_2(n,n-2)=C(n,3)+3C(n,4)$;当 $n\geqslant6$ 时,$S_2(n,n-3)=C(n,4)+10C(n,5)+15C(n,6)$。

文[2~4]已证得

$$S_2(n,n-4)=C(n,5)+25C(n,6)+105C(n,7)+105C(n,8)(n\geqslant8)$$

$$S_2(n,n-5)=C(n,6)+56C(n,7)+490C(n,8)+1\,260C(n,9)+945C(n,10)(n\geqslant10)$$

$$S_2(n,n-6)=C(n,7)+119C(n,8)+1\,918C(n,9)+9\,450C(n,10)+17\,325C(n,11)+10\,395C(n,12)(n\geqslant12)$$

上述结论可统一推广为

定理　当 $n\geqslant2k$ 时,$S_2(n,n-k)=\sum\limits_{h=k+1}^{2k}S_3(h,h-k)C(n,h)$。

证　设 A 是含有 n 个元素的集合,当 $n\geqslant2k$ 时,按照 $S_2(n,n-k)$的定义,我们有且仅有下面 k 种不同情况分拆方法。

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n-k}A_i$,这里 $A_i(1\leqslant i\leqslant n-k)$满足:(1) $A_i\bigcap\limits_{i\neq j}A_j=\phi(1\leqslant i,j\leqslant n-k)$;(2) $|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_{n-h}|=1,|A_{n-h+1}|\geqslant2,|A_{n-h+2}|\geqslant2,\cdots,|A_{n-k-1}|\geqslant2,|A_{n-k}|\geqslant2$ 且 $|\bigcup\limits_{i=k}^{h-1}A_{n-i}|=h$,因为 $n-h+(h+k)\leqslant n$,且 $(h-k)>0$,所以可推出 $k<h\leqslant2k$ 即 $h=k+1,k+2,\cdots,2k$,只有这 k 种情况存在。

我们从 A 中取出 $h(h=k+1,k+2,\cdots,2k)$个元素的方法有 $C(n,h)$种.而 $h(h=k+1,k+2,\cdots,2k)$个元素分成$(h-k)$部分并且每一部分至少有两个元素的分拆数为 $S_3(h,h-k)$,因此有分拆数 $S_3(h,h-kC(n,h),(h=k+1,k+2,\cdots,2k)$。

收稿日期:2009-03-23

作者简介:吴跃生(1959-),男,江西瑞金人,副教授,主要从事高等数学教学与研究工作。

故根据加法原则将 A 分成 $n-k$ 个部分的分拆数为 $\sum_{h=k+1}^{2k} S_3(h,h-k)C(n,h)$,

因此 $S_2(n,n-k)=\sum_{h=k+1}^{2k} S_3(h,h-k)C(n,h)$。定理得证。

例 当 $n\geqslant 14$ 时,计算 $S_2(n,n-7)$

由定理知

$$\begin{aligned} S_2(n,n-7) &= \sum_{h=8}^{14} S_3(h,h-7)C(n,h) \\ &= S_3(8,1)C(n,8)+S_3(9,2)C(n,9)+S_3(10,3)C(n,10)+S_3(11,4)C(n,11) \\ &\quad + S_3(12,5)C(n,12)+S_3(13,6)C(n,13)+S_3(14,7)C(n,14) \end{aligned}$$

而 $9=\begin{cases}2+7\\3+6\\4+5\end{cases}, 10=\begin{cases}2+2+6\\2+3+5\\2+4+4\\3+3+4\end{cases}, 11=\begin{cases}2+2+2+5\\2+2+3+4\\2+3+3+3\end{cases}, 12=\begin{cases}2+2+2+2+4\\2+2+2+3+3\end{cases} 13=2\times5+3, 14=2\times7$

所以 $S_3(8,1)=1, S_3(9,2)=C(9,2)+C(9,3)+C(9,4)=246,$

或 $S_3(9,3)=S_2(9,2)-C_9^1=2^{9-1}-1-9=246$

$$S_3(10,3)=\frac{1}{2}C(10,6)C(4,2)C(2,2)+C(10,5)C(5,3)C(2,2)$$

$$+\frac{1}{2}C(10,4)C(6,3)C(3,3)+\frac{1}{2}C(10,2)C(7,4)C(4,4)=6\,825$$

$$S_3(11,4)=\frac{1}{3!}C(11,5)C(6,2)C(4,2)C(2,2)+\frac{1}{2}C(11,3)C(8,4)C(2,2)$$

$$+\frac{1}{3!}C(11,3)C(8,3)C(5,3)C(2,2)=56\,980$$

$$S_3(12,5)=\frac{1}{4!}C(12,4)C(8,2)C(6,2)C(4,2)C(2,2)$$

$$+\frac{1}{2}C(12,3)C(9,3)+\frac{1}{3!}C(6,2)C(4,2)C(2,2)=19\,0575$$

$$S_3(13,6)=\frac{1}{5!}C(13,3)C(10,2)C(8,2)C(6,2)C(4,2)C(2,2)=27\,0270$$

$$S_3(14,7)=\frac{1}{7!}C(14,2)C(12,2)C(10,2)C(8,2)C(6,2)C(4,2)C(2,2)=13\,5135$$

所以

$$\begin{aligned} S_2(n,n-7) &= C(n,8)+246C(n,9)+6\,825C(n,10)+56\,980C(n,11)+190\,575C(n,12) \\ &\quad +270\,270C(n,13)+135\,135C(n,14) \end{aligned}$$

同理:当 $n\geqslant 16$ 时,$S_2(n,n-8)=\sum_{h=9}^{16} S_3(h,h-k)C(n,h)$

$$\begin{aligned} &= S_3(9,1)C(n,8)+S_3(10,2)C(n,10)+S_3(11,3)C(n,11)+S_3(12,4)C(n,12) \\ &\quad + S_3(13,5)C(n,13)+S_3(14,6)C(n,14)+S_3(15,7)C(n,15) \\ &\quad + S_3(16,8)C(n,16) \\ &= C(n,8)+501C(n,10)+22\,935C(n,11)+302\,995C(n,12) \\ &\quad +1\,636\,635C(n,13)+4\,099\,095C(n,14)+4\,729\,725C(n,15)+2\,027\,025C(n,16) \end{aligned}$$

参考文献:

[1] 陈景润.组合数学简介[M].天津:天津科学技术出版社,1988.121-126.

[2] 杜春雨.第二类 Stirling 数的一个恒等式[J].江西师范大学学报(自然科学版),2004,(5):240-241.

[3] 吴跃生.第二类 Stirling 数的又一个恒等式[J].华东交通大学学报,2007,24(2):146-147.
[4] 吴跃生.第二类 Stirling 数 $S_2(n,n-6)$的一个公式[J].华东交通大学学报,2008,25(4):97-99.

A Formula of $S_2(n, n-k)$ of the Second Kind Stirling Numbers

WU Yue-sheng

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, we give a general definition of the Stirling numbers of the second kind. Then we obtain a more general form of the Stirling numbers of the second kind.

Key words: combinations; Stirling numbers of the second kind; general Stirling number of the second kind

(责任编辑:吴泽九)

(上接第94页)

On the Gracefulness of Graphs $C_n \cup T_k$

SONG Qing-hua

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong university, Nanchang 330013, China)

Abstract: $C_n \cup T_k$ is composed of cycle C_n and tree T_k. This paper gives the graceful labelings which are composed of unicyclic graph and firecracker-tree when $n=3,4,6$. Other labelings such as sequential labeling, harmonious labeling are given about $C_n \cup T_k$, when T_k is a firecracker tree and a caterpillar.

Key words: unicyclic graph; firecracker tree; gracefulness; labeling

(责任编辑:吴泽九)