文章编号:1005-0523(2009)03-0098-03

联图 $P_m \vee S_{n,n}$ 的邻点可区别全染色

王继顺,闫敏伦

(连云港师范高等专科学校 数学系,江苏 连云港 222006)

摘要:简单连通图 $G(V,E)$ 的 k-正常全染色 f 称为邻点可区别的,如果对 $G(V,E)$ 的任意相邻两顶点,其顶点的颜色及关联边的颜色构成的集合不同。这样的 k 中最小者称为 $G(V,E)$ 的邻点可区别全色数。研究了路与双星图的联图 $P_m \vee S_{n,n}$ 邻点可区别的全染色问题,得到了联图 $P_m \vee S_{n,n}$ 邻点可区别的全色数。

关键词:图;联图;全染色;邻点可区别全染色

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

具有重要实际意义和理论意义的图染色问题,是图论研究的主要内容之一。图染色的基本问题就是确定其各种染色法的色数。[1]提出图邻点可区别全染色的概念,得到若干特殊图的邻点可区别全色数,并给出了相应的猜想。由于星图不仅是图论研究的一类重要的图,在计算机网络、图像处理和模式识别等领域也得到了广泛的应用,而路是图论和实际中最基本的一种图[2~5]。研究了一些路或星图联图的邻点可区别全染色,本文研究了路 P_m 与双星图 $S_{n,n}$ 的联图 $P_m \vee S_{n,n}$ 的邻点可区别全染色问题,得到了 $P_m \vee S_{n,n}$ 邻点可区别全色数,结果说明了[1]提出的邻点可区别全色数猜想对 $P_m \vee S_{n,n}$ 是成立的。

1 相关概念及引理

定义 1[5] 一个图 $G(V,E)$ 满足条件:$V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_{m-1};v_1,v_2,\cdots,v_{n-1};w_1,w_2\}$,$E(G)=\{w_1u_i \mid i=1,2,\cdots,m-1\}\cup\{w_2v_j \mid j=1,2,\cdots,n-1\}\cup\{w_1w_2\}$,$m,n\geqslant 2$,称该图为双星图,记作 $S_{m,n}$。特别地,$m=n$ 时双星图即为 $S_{n,n}$。

定义 2[1] 设 $G(V,E)$ 是阶数至少为2的简单连通图,k 是正整数,f 是 $V\cup E$ 到 $\{1,2,3,\cdots,k\}$ 的映射,对 $\forall u\in V(G)$,记 $C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv) \mid uv\in E(G),v\in V(G)\}$,若 f 作为 G 的 k-正常全染色还满足:对 $\forall uv\in E(G)$,有 $C(u)\neq C(v)$,则称 f 为 G 的 k-邻点可区别的全染色(简记为 k-AVDTC),称 $\min\{k \mid G$ 有 k-邻点可区别的全染色$\}$ 为 G 的邻点可区别的全色数,记作 $X_{at}(G)$。

引理 1.1[1]:对阶数不小于2的简单连通图 $G(V,E)$,如果 G 最大度点都不相邻,则有 $X_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+1$;若图 G 中两个最大度顶点相邻,则有 $X_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+2$,其中 $\Delta(G)$ 为 G 中顶点的最大度。

猜想[1]:对阶数不小于2的简单连通图 $G(V,E)$,有 $X_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+3$。

文中用到的未加说明的术语或记号可参见[6]。

2 主要结果

定理 2.1 设有 $2n$ 个顶点的双星图 $S_{n,n}(n\geqslant 3)$ 和路$(m\geqslant 2)$的联图为 $P_m\vee S_{n,n}$,则有

$$X_{at}P_m\vee S_{n,n}=\begin{cases}2n+3, m=2,3;\\ 2n+4, m\leqslant n+2;\\ m+n+2, m>n+2.\end{cases}$$

证明 对双星图 $S_{n,n}(V_1,E_1)$ 和路 $P_m(V_2,E_2)$,设 $V_1=\{v_{11},v_{12},\cdots,v_{1n},v_{21},v_{22},\cdots,v_{2n}\}$,$V_2=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 且 $d(v_{11})(S_{n,n})=d(v_{21})(S_{n,n})=n$,其中 $d(v)$ 表示顶点 V 的度。下分四种情况讨论。

收稿日期:2009-03-23

基金项目:连云港师专"青蓝"工程人才资助;连云港师专科技创新团队资助项目(LSZTD200906)

作者简介:王继顺(1970-),男,山东临沭县人,硕士,讲师,主要研究图论、组合优化与计算机辅助几何设计。

情形1　当 $m=2$ 时,联图 $P_2 \vee S_{n,n}$ 有相邻最大度点 u_1, u_2,且 $d(u_1)=d(u_2)=2n+1$,故由引理1.1,有 $X_{at}(P_2 \vee S_{n,n}) \geqslant 2n+3$。下证 $X_{at}(P_2 \vee S_{n,n}) \leqslant 2n+3$,为此,仅需证 $P_2 \vee S_{n,n}$ 存在 $(2n+3)$ - AVDTC。现令

$$f(v_{11})=n, f(v_{21})=2n, f(u_1)=2n+1, f(u_2)=2n+2;$$
$$f(v_{1i})=i-1, f(v_{2i})=n+i-1, i=2,\cdots,n; f(u_1u_2)=2n+3,$$
$$f(u_jv_{1i})=i+j-1, f(u_jv_{2i})=n+i-1, i=1,\cdots,n, j=1,2;$$
$$f(v_{11}v_{21})=2n+1, f(v_{11}v_{1i})=n+i, f(v_{21}v_{2i})=i-1, i=2,\cdots,n;$$

首先 f 是 $P_2 \vee S_{n,n}$ 的 $(2n+3)$ - 全染色,其次易验证 $\forall uv \in E(G)$,都有 $C(u) \neq C(v)$,所以 f 为 $P_2 \vee S_{n,n}$ 的 $(2n+3)$ - AVDTC。

情形2　当 $m=3$ 时,联图 $P_3 \vee S_{n,n}$ 只有一个最大度顶点 u_2,且 $\Delta(P_3 \vee S_{n,n})=d(u_2)=2n+2$,故由引理1.1,有 $X_{at}(P_3 \vee S_{n,n}) \geqslant 2n+3$,为此,仅需证 $P_3 \vee S_{n,n}$ 存在 $(2n+3)$ - AVDTC。现构造映射

$$f: V \cup E(P_2 \vee S_{n,n}) \to \{1,\cdots,2n+3\}$$
$$f(v_{11})=n+1, f(v_{21})=2n, f(u_j)=2n+j, j=1,2,3; f(v_{1i})=i-1, i=2,\cdots,n;$$
$$f(v_{2i})=n+i-1, i=2,\cdots,n; f(u_1u_2)=2n+3, f(u_2u_3)=1;$$
$$f(u_jv_{1i})=i+j-1, f(u_jv_{2i})=n+i-1, i=1,\cdots,n, j=1,2,3;$$
$$f(v_{11}v_{21})=2n+1, f(v_{11}v_{1i})=n+i, f(v_{21}v_{2i})=i-1, i=2,\cdots,n;$$

易见 f 是 $P_3 \vee S_{n,n}$ 的 $(2n+3)$ - 全染色,且在此染色法 f 作用下,$\forall uv \in E(P_3 \vee S_{n,n})$ 满足 $C(u) \neq C(v)$,所以 f 为 $P_3 \vee S_{n,n}$ 的 $(2n+3)$ - AVDTC。

情形3　当 $4 \leqslant m \leqslant n+2$ 时,由于 $P_3 \vee S_{n,n}$ 的相邻最大度顶点有 $u_2, u_3, \cdots, u_{m-1}$,且其度数为 $2n+2$,特别地,当 $m=n+2$ 时,相邻最大度顶点还有 v_{11}, v_{21},它们度数也为 $2n+2$,故由引理1.1,有 $X_{at}(P_3 \vee S_{n,n}) \geqslant 2n+4$。为此,仅需证 $P_m \vee S_{n,n}$ 存在 $(2n+4)$ - AVDTC。现只要构造一个从 $V \cup E(P_m \vee S_{n,n})$ 到 $\{1,\cdots,2n+4\}$ 的映射 f:

$$f(v_{11})=m+1, f(v_{21})=2n+4, f(u_j)=2n+j, j=1,\cdots,4, f(u_j)=j-4, j=5,\cdots,m;$$
$$f(v_{1i})=i-1, f(v_{2i})=n+i-1, i=2,\cdots,n; f(u_1u_2)=2n+3, f(u_2u_3)=2n+4,$$
$$f(u_{j-1}u_j)=j-3, j=4,\cdots,m; f(u_jv_{1i})=i+i-1, i=1,\cdots,n, j=1,2,3;$$
$$f(u_jv_{2i})=n+i+j-1, i=1,\cdots,n, j=1,2,\cdots,5; f(u_jv_{2i})=n+i+j-1, i=1,\cdots,n-(j-5),$$
$$f(u_jv_{2i})=k, i=n-(j-5)+k, k=1,\cdots,5, j=6,\cdots,m;$$
$$f(v_{11}v_{21})=2n+3, f(v_{11}v_{1i})=m+i, f(v_{21}v_{2i})=i-1, i=2,\cdots,n;$$

可见,f 是 $P_m \vee S_{n,n}$ 的 $(2n+4)$ - 全染色,还需进一步验证该染色法 f 对 $\forall uv \in E(P_m \vee S_{n,n})$,都有 $C(u) \neq C(v)$,事实上

$$C(v_{11})=\{2n+3, m+i, j \mid i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m\},$$
$$C(v_{1i})=\{i-1, m+i, i+j-1 \mid j=1,\cdots,m\}, i=2,\cdots,n;$$
$$C(v_{21})=\{2n+3, 2n+4, i-1, n+j \mid i=2,\cdots,n, j=1,m\},$$
$$C(v_{2i})=\{i-1, n+i-1, n+i+j-1 \mid j=1,\cdots,m+n-4\}, i=2,\cdots,n;$$

而当 $4 \leqslant m<6$ 时,$C(v_{2i})=\{i-1, n+i-1, n+i+j-1 \mid j=1,\cdots,m\}, i=2,\cdots,n-(m-5)$;当 $6 \leqslant m \leqslant n+2$ 时,$C(v_{2i})=\{i-1, n+i-1, n+i+j-1, l \mid l=1,\cdots,k, j=1,\cdots m-k), i=n-(m-5)+k, k=1,2,\cdots,m-5$;$C(u_1)=\{2n+1, 2n+3, i, n+i \mid i=1,\cdots,n\}$,$C(u_2)=\{2n+2, 2n+3, 2n+4, i+1, n+i+1 \mid i=1,\cdots,n\}$,$C(u_j)=\{2n+5-k \mid k=1,\cdots,5-, j\} \cup \{k-2 \mid k=3,\cdots,j\} \cup \{i+j-1, n+i+j-1 \mid i=1,\cdots,n\}, j=3,4,5$;$C(u_j)=\{i \mid i=1,\cdots,j-2) \cup \{n+5+i \mid i=1,2,\cdots,n-(j-5)\} \cup \{i+j-1 \mid i=1,\cdots,n), j=6,\cdots,m$;

从而 f 为 $P_m \vee S_{n,n}$ 的 $(2n+4)$ - AVDTC。

情形4　当 $m \geqslant n+2$ 时,由于 $P_m \vee S_{n,n}$ 的相邻最大度顶点有 v_{11}、v_{21},且其顶点度数为 $m+n$,故由引

理1.1,有 $X_{at}(P_m \vee S_{n,n}) \geq m+n+2$。为此,仅需证 $P_m \vee S_{n,n}$存在$(m+n+2)$ - AVDTC。下给出一个 $V \cup E(P_m \vee S_{n,n})$到$\{1,\cdots,m+n+2\}$的映射$f$:

$$f(v_{11})=m+1, f(v_{1i})=i-1, i=2,\cdots,n; f(v_{21})=m+n+2, f(v_{2i})=n+i-1, i=2,\cdots,n;$$

$$f(u_j)=2n+j, j=1,\cdots,m-n+2, f(u_j)=[j-(m-n+3)]+1, j=m-n+3,\cdots,m;$$

$$f(u_{j-1}u_j)=2n+j+1, j=2,\cdots,m-n+1, f(u_{j-1}u_j)=j-(m-n+1), j=m-n+2,\cdots,m;$$

$$f(u_jv_{1i})=i+j-1, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m; f(u_jv_{2i})=n+i+j-1, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m-n+3;$$

$$f(u_jv_{2i})=k, i=n-[j-(m-n+3)]+k, k=1,\cdots,j-(m-n+3), j=m-n+4,\cdots,m;$$

$$f(v_{11}v_{21})=m+n+1, f(v_{11}v_{1i})=m+i, f(v_{21}v_{2i})=i-1, i=2,\cdots,n;$$

显然f是$P_m \vee S_{n,n}$的$(m+n+2)$ - 全染色,下验证对个$\forall\, uv \in E(P_m \vee S_{n,n})$,都有 $C(u) \neq C(v)$,事实上,$P_m \vee S_{n,n}$所有顶点的色集合为

$$C(V_{11})=\{m+n+1, m+i, j \mid i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m\},$$

$$C(v_{1i})=\{i-1, m+i, i+j-1 \mid j=1,\cdots,m\}, i=2,\cdots,n;$$

$$C(v_{21})=\{m+n+1, m+n+2, i-1, n+j \mid i=2,\cdots,n, j=1,\cdots,m\};$$

$$C(v_{2i})=\{i-1, n+i-1, n+i+j-1 \mid j=1,\cdots,m-n+3\} \cup \{k \mid k=1,\cdots,i-2\}, i=2,\cdots n;$$

$$C(u_1)=\{2n+1, 2n+3, i, n+i \mid i=1,\cdots,n\},$$

$$C(u_j)=\{2n+j, 2n+j+1, 2n+j+2, i+j-1, n+i+j-1 \mid i=1,2,\cdots,n\}, j=2,\cdots,m-n,$$

$$C(u_j)=\{1, 2n+j, 2n+j+1, i+j-1, n+i+j-1 \mid i=1,2,\cdots,n\}, j=m-n+1,$$

$$C(u_j)=\{1,2,2n+j, i+j-1, n+i+j-1 \mid i=1,2,\cdots,n\}, j=m-n+2,$$

$$C(u_j)=\{j-m+n-2, j-m+n-1\} \cup \{k \mid k=m-n+3,\cdots,m+n+2\} \cup \{i \mid i=1,\cdots,k, k=m-j+1\}, j=m-n+3,\cdots,m。$$

所以f为$P_m \vee S_{n,n}$的$(m+n+2)$ - AVDTC。综上可得,结论成立。

参考文献:

[1] 张忠辅,陈祥恩,李敬文,等.关于图的邻点可区别全染色[J].中国科学(A辑),2004,34(5):574-583.

[2] 晁福刚,强会英,闫丽宏,等.$P_m \vee S_{n,n}$的邻点可区别全染色[J].经济数学,2005,22(3):327-330.

[3] 陈祥恩,张忠辅.$P_m \vee S_{n,n}$的邻点可区别全染色[J].西北师范大学学报(自然科学版),2005,41(1):13-15.

[4] 王继顺,邱泽阳,张忠辅,等.联图 $P_m \vee S_{n,n}$的邻点可区别全染色[J].应用数学学报,2006,29(5):879-884.

[5] 马少仙,李敬文,田双亮,等.图的强边色数及点可区别全色数[J].西北民族大学学报(自然科学版),2005,26(2):18-20.

[6] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with apllications[M]. London: The Macmillan Press LTD, 1976.

On Adjacent Vertex-distinguishing Total Coloring of $P_m \vee S_{n,n}$

WANG Ji-shun, YAN Min-lun

(Department of Mathematics, Lanyungang Teacher's College, Lianyungang 222006, China)

Abstract: A k-proper total coloring of a simple connected graph $G(V,E)$ is called adjacent-distinguishing. If there are two adjacent vertices in $G(V,E)$, their colors are different from that of related side. $G(V,E)$, the minimum in k, is called the adjacent vertex distinguishing total chromatic number. In this paper, we studies the adjacent vertex-distinguishing total coloring of join graph $P_m \vee S_{n,n}$, and the adjacent vertex-distinguishing total chromatic numbers of $P_m \vee S_{n,n}$ are obtained.

Key words: graph; join graph; total coloring; adjacent vertex-distinguishing total coloring

(责任编辑:吴泽九)