第 26 卷第 4 期
2009 年 8 月

华 东 交 通 大 学 学 报
Journal of East China Jiaotong University

Vol.26 No.4
Aug.,2009

文章编号:1005-0523(2009)04-0091-04

关于图的符号圈点控制

帅春萍,徐保根,赵金凤,赵 华

(华东交通大学 基础科学学院,江西 南昌 330013)

摘要:引入了关于图的符号圈点控制概念,给出了图 G 的符号圈点控制数 $\gamma_{sc}(G)$ 的一个下界,即证明了对于任意 n 阶图 G,若其最小度 $\delta=\delta(G)\geq 2$,则有 $\gamma_{sc}(G)\geq 2\delta-n$ 成立,并且此下界是最好可能的。此外,还确定了几类特殊图的符号圈点控制数。

关 键 词:符号圈点控制函数;符号圈点控制数;轮图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号和术语同于文[1]。

设 $G=(V,E)$ 是一个图,若 $S\subseteq V(G)$,则 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图。若 C 为图 G 中的一个长度不小于 4 的圈,u 和 v 为 C 中两个不相邻的顶点,如果 $uv\in E(G)$,则称 uv 为圈 C 的一条弦。图 G 的一个圈 C 是无弦的当且仅当 $G[V(C)]=C$. G 的一个无弦圈也称为 G 的一个导出圈。

设 G_1 和 G_2 为两个点不相交的图,$V(G_1\vee G_2)=V(G_1)\cup V(G_2)$,$E(G_1\vee G_2)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv\mid u\in V(G_1),v\in V(G_2)\}$,则称 $G_1\vee G_2$ 为 G_1 和 G_2 的联图。

近些年来,图的控制理论的研究内容越来越丰富。加拿大著名图论专家 E.J.Cockayne[2] 等人先后引入了图的许多不同类型的控制概念及其变化形式。1998 年美国图论学者 W.T.Haynes 等人出版了两部专著[2,3],较为系统地综述了近期的一些主要研究成果。值得注意的是:几乎所有的概念和结果都是针对图的点控制而言,很少涉及图的边控制问题。为了更进一步丰富和完善图的控制理论内容,文[1]已将图的点控制概念转向研究图的边控制问题,并获得了不少的研究成果,如符号边控制、符号星控制、符号团控制等,符号圈控制等。然而,几乎第一种符号边控制概念都有其对应的点控制,为此我们引入图的符号圈点控制概念如下:

定义 1 设 $G=(V,E)$ 是一个非空图,一个函数 $f:V\to\{-1,1\}$ 如果满足 $\sum\limits_{v\in V(C)}f(v)\geq 1$ 对 G 中每一个无弦的圈 C 均成立,则称 f 为图 G 的一个符号圈点控制函数,而 $\gamma_{sc}(G)=\min\{\sum\limits_{v\in V(G)}f(v)\mid f$ 为 G 的符号圈点控制函数$\}$,称为图 G 的符号圈点控制数。

由定义 1 知有如下性质:

(1) $|V(G)|\geq\gamma_{sc}(G)\geq-|V(G)|$;

(2) 对于任意两个点不相交的图 G_1 和 G_2,均有

$$\gamma_{sc}(G_1\cup G_2)=\gamma_{sc}(G_1)+\gamma_{sc}(G_2);$$

(3) 对任意图 G,有 $\gamma_{sc}(G)\equiv|V(G)|\pmod 2$;

(4) $\gamma_{sc}(G)=-|V(G)|$ 当且仅当 G 为一个无圈图。

在本文中,主要给出了图 G 的符号圈点控制数 $\gamma_{sc}(G)$ 的一个下界,并确定了几类特殊图的符号圈点控制数。

收稿日期:2009-03-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(NO.10661007);江西省自然科学基金资助项目(2007GZS0715)

作者简介:帅春萍(1983-),女,江西省奉新人,硕士生,研究方向为运筹学与控制论。

1 主要结果及其证明

如果一个平面图 G 的每个面(包括外部面)的边界均为三角形,则称 G 为极大平面图。

定理1 对于任意 n 阶极大可平面图 $G(n\geq 3)$,均有

(1) $\gamma_{sc}(G)=n-2\beta(G)$;

(2) $\gamma_{sc}(G\vee K_1)=n+1-2\beta(G)$

其中 $\beta(G)$ 表示图 G 的点独立数

证明 (1) 将图 G 嵌入平面内,设 f 为 G 的一个符号圈点控制函数,使得

$$\gamma_{sc}(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v).$$

令 $A=\{v\in V(G)\mid f(v)=1\}$, $B=\{v\in V(G)\mid f(v)=-1\}$,由定义知,

$$\gamma_{sc}(G)=|A|-|B|=n-2|B|$$

由于图 G 的每个面均为一个三角形 F,由定义知: $\sum_{v\in V(F_i)}f(v)\geq 1$,从而 B 中任何两点是不邻的,即 $|B|\leqslant\beta(G)$, $\gamma_{sc}(G)=|A|-|B|=n-2|B|\geq n-2\beta(G)$.

另一方面,设 M 为图 G 的一个最大(点)独立集,即有 $|M|=\beta(G)$,可定义图 G 的一个符号圈点控制函数 f 如下

$$f(v)=\begin{cases}-1, \text{当 } v\in M \text{ 时}\\ +1, \text{当 } v\in V\setminus M \text{ 时}\end{cases}$$

不难验证, f 为图 G 的一个符号圈点控制函数,从而 $\gamma_{sc}(G)\leqslant\sum_{v\in V(G)}f(v)=n-2\beta(G)$,结合上述得 $\gamma_{sc}(G)=n-2\beta(G)$。

(2) 记 $H=G\vee K_1$, $V(H)=V(G)\cup\{v_0\}$, M 为图 G 的一个最大(点)独立集,类似地

设 f 为 G 的一个符号圈点控制函数,使得 $\gamma_{sc}(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$.定义图 G 的一个符号圈点控制函数 f_1 如下

$$f_1(v)=\begin{cases}f(v) & \text{当 } v\in V(G)\text{时}\\ +1 & \text{当 } v=v_0 \text{ 时}\end{cases}$$

不难验证, f_1 为图 H 的一个符号圈点控制函数,由(1)得

$$\gamma_{sc}(H)\leqslant\sum_{v\in V(H)}f(v)=1+\gamma_{sc}(G)=n+1-2\beta(G)。$$

另一方面,设 f 为 H 的一个符号圈点控制函数,使得 $\gamma_{sc}(H)=\sum_{v\in V(H)}f(v)$.由于 H 的每一对相邻点均在一个三角形中,故在 f 下标号为 -1 的点是不相邻的,即令

$B=\{v\in V(H)\mid f(v)=-1\}$,有 $|B|\leqslant\beta(H)=\beta(G)$,因此有

$\gamma_{sc}(H)=|V(H)|-2|B|\geq n+1-2\beta(G)$,结合上述得 $\gamma_{sc}(H)=n+1-2\beta(G)$。证毕。

定理2 对于任意 n 阶图 G,若其最小度 $\delta=\delta(G)\geq 2$,则有 $\gamma_{sc}(G)\geq 2\delta-n$,并且此下界是最好可能的。

证明 设 f 为 G 的一个符号圈点控制函数,使得

$$\gamma_{sc}(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v).$$

令 $A=\{v\in V(G)\mid f(v)=1\}$, $B=\{v\in V(G)\mid f(v)=-1\}$,记 $|A|=s$, $|B|=t$,由定义知, $\gamma_{sc}(G)=s-t=2s-n$。因为 $\delta=\delta(G)\geq 2$,故 G 中有圈,从而至少有一个无弦圈 C,由定义得 $\sum_{v\in V(C)}f(v)\geq 1$,故 $s\geq 2$。

在 G 中去掉 $s-1$ 个 A 中的点(连同其关联的边),得到一个图 H,由于 H 中恰好只有一个 A 中的点,故 H 为一个无圈图,从而 $\delta(H)\leqslant 1$, $\delta=\delta(G)\leqslant\delta(H)+(s-1)=s$,即

$$\gamma_{sc}(G)=2s-n\geq 2\delta-n$$

下面说明此下界是最好可能的。

对于每一个整数 $\delta\geq 2$,定义一个联图 $G=K_\delta\vee\overline{K_{n-\delta}}$,可见 $\delta(G)=\delta\geq 2$,从上述知 $\gamma_{sc}(G)\geq 2\delta-n$。另一方面,令 $V_1=V(K_\delta)$,$V_2=V(\overline{K_{n-\delta}})$,定义图 G 的一个符号圈点控制函数 f 如下

$$f(v)=\begin{cases}+1,\text{当 } v\in V_1 \text{ 时}\\ -1,\text{当 } v\in V_2 \text{ 时}\end{cases}$$

不难验证,f 为图 G 的一个符号圈点控制函数,从而 $\gamma_{sc}(G)\leq\sum_{v\in V(G)}f(v)=2\delta-n$,因此有 $\gamma_{sc}(G)=2\delta-n$,即定理给出的下界是最好可能的。证毕。

下面给出几类特殊图的符号圈点控制数。

定理3　设 n 和 m 均为整数,则

(1) 当 $n\geq 3$ 时,$\gamma_{sc}(K_n)=n-2$;

(2) 当 $n\geq 2,m\geq 2$ 时,$\gamma_{sc}(K_{n,m})=m+n-2$;

(3) 当 $n\geq 3$ 时,$\gamma_{sc}(C_n)=\begin{cases}1 & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ 2 & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$

(4) 对任意树 T,均有 $\gamma_{sc}(T)=-|V(G)|$。

证明　(1)设 f 为图 K_n 的一个符号圈点控制函数,注意到 $n\geq 3$,K_n 中任何两个点在同一个三角形中,故在 f 下标号为 -1 的点最多只有一个,即 $\gamma_{sc}(K_n)=n-2$;

(2) 设 f 为图 $K_{m,n}$ 的一个符号圈点控制函数,注意到 $n\geq 2,m\geq 2$,$K_{m,n}$ 中任何两个点均在一个无弦的 C_4 中,故在 f 下标号为 -1 的点最多只有一个,即 $\gamma_{sc}(K_{m,n})=m+n-2$;

(3)和(4)均是显然的,证毕。

定理4　设整数 $n\geq 3$,则 $n+1$ 轮图 $W_{n+1}=C_n\vee K_1$ 的符号圈点控制数

$$\gamma_{sc}(W_{n+1})=\begin{cases}2,\text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ 3,\text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

证明　设 f 为图 $G=W_{n+1}$ 的一个符号圈点控制函数,且使得 $\gamma_{sc}(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$。

令 $A=\{v\in V(G)|f(v)=1\}$,$B=\{v\in V(G)|f(v)=-1\}$,记 $|A|=s$,$|B|=t$,由定义知,

$$\gamma_{sc}(G)=s-t=n+1-2t。$$

由于 $G=W_{n+1}$ 中任何相邻的点在同一个三角形中,故 B 中的点在 G 中是不相邻的,即有

$|B|=t\leq\beta(G)=\left[\frac{n}{2}\right]$。其中 $\beta(G)$ 为 G 的点独立数,$[x]$表示不超过 x 的最大整数。从而有

$$\gamma_{sc}(G)=n+1-2t\geq n+1-2\left[\frac{n}{2}\right] \tag{1}$$

情况1　当 n 为奇数时;由(1)知 $\gamma_{sc}(G)\geq 2$。

另一方面,令 M 表示图 G 的一个最大点独立集,$|M|=\beta(G)$。定义图 G 的一个符号圈点控制函数 f 如下

$$f(v)=\begin{cases}-1,\text{当 } v\in M \text{ 时}\\ +1,\text{当 } v\in V\setminus M \text{ 时}\end{cases}$$

不难验证,f 为图 G 的一个符号圈点控制函数,从而有

$$\gamma_{sc}(G)\leq\sum_{v\in V(G)}f(v)=n+1-2\beta(G)=n+1-2\left[\frac{n}{2}\right]=2,\text{故 }\gamma_{sc}(G)=2。$$

情况2　当 n 为偶数时;由(1)知 $\gamma_{sc}(G)\geq 1$。记 $V(G)=V(C_n)\cup\{v_0\}$。

如果 $f(v_0)=-1$,则 $V(C_n)\subseteq A$,因此 $\gamma_{sc}(G)=n-1\geq 2$;

如果 $f(v_0)=1$,由于 $\sum_{v\in V(C_n)}f(v)\geq 1$,因此 $\gamma_{sc}(G)\geq 1+1=2$;

由性质(3)及以上两式得知：$\gamma_{sc}(G)\geq 3$。

另一方面，取 $M\subseteq V(C_n)$ 为 G 的一个点独立集，且使得 $|M|=\frac{n}{2}-1$。定义图 G 的一个符号圈点控制函数 f 如下：

$$f(v)=\begin{cases}-1, 当\ v\in M\ 时\\ +1, 当\ v\in V\setminus M\ 时\end{cases}$$

不难验证，f 为图 G 的一个符号圈点控制函数，从而有

$$\gamma_{sc}(G)\leqslant\sum_{v\in V(G)}f(v)=n+1-2|M|=3, 故\ \gamma_{sc}(G)=3。$$

至此，定理 4 证毕。

参考文献：

[1] 徐保根. 图的控制理论[M]. 北京：科学出版社，2008.

[2] Haynes T W, Hedetniemi S T and Slater P J. Domination in graphs[M]. New York, 1998.

[3] Haynes T W, Hedetniemi S T and Slater P J. Fundamentals of domination in graphs[M]. New York, 1998.

On Signed Cycle Vertex Domination in Graphs

SHUAI Chun-ping, XU Bao-gen, ZHAO Jin-feng, ZHAO Hua

(School of Basic Sciences, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: we introduce the concept of signed cycle vertex domination in graphs, and give a lower bound for signed cycle vertex domination number $\gamma_{sc}(G)$ of a graph G. we prove that $\gamma_{sc}(G)\geq 2\delta-n$ hold for any graph G with $\delta=\delta(G)\geq 2$, and show that this lower bound is the most possible. In addition, we get the signed cycle vertex domination number for some special classes of graphs.

Key words: signed cycle vertex domination function; signed cycle vertex domination number; wheel

(责任编辑：吴泽九)