文章编号:1005-0523(2009)04-0100-05

图的上符号控制数的上界

刘惠敏

(华北电力大学 数理学院,北京 102206)

摘要:令 $\Gamma_s(G)=\max\{w(f)\mid f$ 是图 G 的极小符号控制函数$\}$是图的上符号控制数上界,根据最小度最大度等参数改进了上符号控制数的上界,是对 Favaron 在正则图中给出的上符号控制数上界及 Wang C.X. 和 Mao J.Z. 在几乎正则图中给出的上符号控制数上界的一个推广.与 Tang Huajun, Chen Yaojun 在[3]中确立的解相比,结果更为精确。

关键词:符号控制函数;上界;上符号控制数

中图分类号:O157.5　　文献标识码:A

本文讨论的图都是有限简单图。设图 $G=(V,E)$, $v\in V$ 的邻域定义为 $N(v)=\{u\in V\mid uv\in E\}$,闭邻域定义为 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$。顶点 v 的度数定义为 $d(v)=|N(v)|$。我们称图 G 是 k-正则的,如果对于任意顶点 $v\in V$,都有 $d(v)=k$。称图 G 是几乎 k-正则的,如果对于任意顶点 $v\in V$,都有 $d(v)=k-1$ 或 k。设 $S\subseteq V$,我们定义 $N(S)=\bigcup_{v\in S}N(v)$,用 $d_s(v)$ 表示 v 在集合 S 中相邻的顶点数。图 G 的最小度和最大度分别用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 表示,在不引起混淆的情况下简记为 δ 和 Δ。对于不相交的点集 A 和 B,我们用 $e(A,B)$ 来表示 A 和 B 之间的边数。本文中用到的其它术语请参照文献[4]。

图 G 的符号控制函数是一个函数 $f:V\to\{-1,1\}$,使得对于任意顶点 $v\in V$,都有 $\sum_{u\in N[v]}f(u)\geq 1$。我们记 $f[v]=\sum_{u\in N[v]}f(u)$。符号控制函数 f 的权重定义为 $w(f)=\sum_{v\in V}f(v)$。符号控制函数 f 是极小的,如果不存在符号控制函数 $g(g\neq f)$ 使得对于任意顶点 $v\in V$, $g(v)\leq f(v)$。图 G 的上符号控制数用 $\Gamma_s(G)$ 表示,定义为 $\Gamma_s(G)=\max\{w(f)\mid f$ 是图 G 的极小符号控制函数$\}$。

1 已有结论

对于正则图,Favaron 给出了 Γ_s 的紧上界[1]。

定理 A[1] 如果 G 是一个具有 n 个顶点的 k-正则图($k\geq 1$),那么当 k 是偶数时,$\Gamma_s(G)\leq\frac{k+1}{k+3}n$;当 k 是奇数时,$\Gamma_s(G)\leq\frac{n(k+1)^2}{(k^2+4k-1)}$。

对于几乎正则图,Wang C.X. 和 Mao J.Z. 在[2]中给出了 Γ_s 的较好的上界。

定理 B[2] 如果 G 是一个具有 n 个顶点的几乎 k-正则图,那么当 k 是偶数时,$\Gamma_s(G)\leq\frac{n(k+2)^2}{(k^2+6k+4)}$;当 k 是奇数时,$\Gamma_s(G)\leq\frac{n(k^2+3k+4)}{(k^2+5k+2)}$。

定理 C[3] 如果 G 是一个具有 n 个顶点的图,那么当 δ 是偶数时,$\Gamma_s(G)\leq\frac{\Delta(\delta+4)-\delta}{\Delta(\delta+4)+\delta}n$;当 δ 是奇数时,$\Gamma_s(G)\leq\frac{\Delta(\delta+3)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+3)+(\delta-1)}n$。特别地,当 G 是一个欧拉图时,$\Gamma_s(G)\leq\frac{\Delta(\delta+2)-\delta}{\Delta(\delta+2)+\delta}n$。

2 主要结论

根据现有的结论,本文进行了推广和改进,我们得到的定理如下:

收稿日期:2009-06-15

作者简介:刘惠敏(1984-),女,山东人,硕士,研究方向为图论及其应用。

定理　设图 $G=(V,E)$ 的顶点数为 n,最小度和最大度分别为 δ 和 Δ,则

当 δ 为奇数时,

$$\Gamma_s(G)\leqslant\begin{cases}\dfrac{\Delta(\delta+1)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+1)+(\delta-1)}n,\text{当 }\Delta\geq3\delta\text{ 时}\\ \dfrac{\Delta(\delta+3)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+3)+(\delta-1)}n,\text{当 }\delta\leqslant\Delta<3\delta\text{ 时}\end{cases}$$

当 δ 为偶数时,

$$\Gamma_s(G)\leqslant\begin{cases}\dfrac{\Delta(\delta+2)-\delta}{\Delta(\delta+2)+\delta}n,\text{当 }\Delta\geq3(\delta+1)\text{ 时}\\ \dfrac{\Delta(\delta+4)-\delta}{\Delta(\delta+4)+\delta}n,\text{当 }\delta\leqslant\Delta<3(\delta+1)\text{ 时}\end{cases}$$

特别地,当图 G 的所有顶点的度数都是偶数时,有 $\Gamma_s(G)\leqslant\dfrac{\Delta(\delta+2)-\delta}{\Delta(\delta+2)+\delta}n$。

3　定理的证明

为了证明本文结论,我们首先给出 Dunbar 等人在[6]中提出的如下定理。

引理[6]　图 G 的符号控制函数 f 是极小的,当且仅当对任意满足 $f(v)=1$ 的顶点 $v\in V$,存在一个顶点 $u\in N[v]$,使得 $f[u]\in\{1,2\}$。

现在我们来证明本文的定理。

设 f 是图 G 的 $\Gamma_s(G)$ 函数,P 和 M 分别表示图 G 中函数值为 $+1$ 和 -1 的点集。当 $\delta=1$ 时,结果是显然的。因此我们只需考虑 $\delta\geq2$ 时的情况。

为书写方便,我们记 $\lfloor\frac{\delta}{2}\rfloor=s_1$,$\lfloor\frac{\Delta}{2}\rfloor=t_1$,$\lceil\frac{\delta+2}{2}\rceil=s_2$,$\lceil\frac{\Delta+2}{2}\rceil=t_2$。

显然,对于任意顶点 $v\in V$,$f(N[v])=f(v)+d_P(v)-d_M(v)$。根据引理,$M\neq\emptyset$。设 $|P|=p$,$|M|=m$,则 $w(f)=|P|-|M|=n-2m$。

对于任意顶点 $v\in P$,有 $d_M(v)\leqslant\lfloor\frac{d(v)}{2}\rfloor$,否则 $f[v]<1$。我们定义 $P_i=\{v\in P|d_M(v)=i\}$,$i=0,1,\cdots,t_1$,设 $|P_i|=p_i$。这样我们就把 P 划分为 t_1+1 个子集。故

$$n=m+p=m+\sum_{i=0}^{t_1}p_i\tag{1}$$

对任意顶点 $v\in M$,有 $d_P(v)\geqslant\lceil((v)+2)/2\rceil$,否则 $f[v]<1$。我们定义 $M_j=\{v\in M|d_P(v)=j\}$,$j=s_2,s_2+1,\cdots,t_2$,$M'=M-\bigcup_{j=s_2}^{t_2}M_j$. 设 $|M_j|=m_j$,所以 $|M'|=m-\sum_{j=s_2}^{t_2}m_j$。显然 $(M_{s_2},\cdots,M_{t_2},M')$ 是 M 的一个划分。

由于 M' 中的顶点最多与 P 中 Δ 个顶点邻接,故

$$\sum_{i=1}^{t_1}ip_i=e(P,M)\leqslant(s_2m_{s_2}+\cdots+t_2m_{t_2})+\Delta(m-(m_{s_2}+\cdots+m_{t_2}))$$

因此

$$\sum_{i=1}^{t_1}ip_i\leqslant\Delta m-((\Delta-s_2)m_{s_2}+\cdots+(\Delta-t_2)m_{t_2})\tag{2}$$

1) 当 $P_0=\emptyset$ 时,由(1)(2)得　$n=m+\sum_{i=1}^{t_1}p_i\leqslant m+\sum_{i=1}^{t_1}ip_i\leqslant(\Delta+1)m$

即　$m\geq n/(\Delta+1)$,所以 $\Gamma_s(G)=n-2m\leqslant(\Delta-1)n/(\Delta+1)$。

易证 $(\Delta-1)n/(\Delta+1)$

$\leqslant \min\left\{\frac{\Delta(\delta+1)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+1)+(\delta-1)}n,\frac{\Delta(\delta+3)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+3)+(\delta-1)}n,\frac{\Delta(\delta+2)-\delta}{\Delta(\delta+2)+\delta}n,\frac{\Delta(\delta+4)-\delta}{\Delta(\delta+4)+\delta}n\right\}$成立。

因此我们只需证明 $P_0\neq\emptyset$ 的情况。

2) 当 $P_0\neq\emptyset$ 时

根据 P 和 M 的划分,对于任意顶点 $v\in(\bigcup_{i=0}^{s_1-1}P_i)\cup M'$,$f[v]\geq 3$。所以对于任意顶点 $v\in V$,当 $f[v]=1$ 或 2 时,有 $v\in(\bigcup_{i=s_1}^{t_1}P_i)\cup(\bigcup_{j=s_2}^{t_2}M_j)$。对任意顶点 $v\in P_0$,由于 f 是极小的,由引理可得,存在 $u\in N(v)$ 使得 $f[u]\in\{1,2\}$. 设 $I=\{u\in N(P_0)|f[u]=1$ 或 $2\}$。则 $I\subseteq\bigcup_{i=s_1}^{t_1}P_i$. 所以

$$p_0=|P_0|\leqslant e(P_0,I)=e(P_0,\bigcup_{i=s_1}^{t_1}(P_i\cap I)) \tag{3}$$

同理,对任意顶点 $u\in P_i\cap I(s_1\leqslant i\leqslant t_1)$,一定存在 u 的邻点 u',使得 $f[u']=1$ 或 2。显然 $u'\in(\bigcup_{i=s_1}^{t_1}P_i)\cup(\bigcup_{j=s_2}^{t_2'}M_j)$。当 $u'\in\bigcup_{i=s_1}^{t_1}P_i$ 时,u 最多和 P_0 中 i 个顶点相邻;当 $u'\in\bigcup_{j=s_2}^{t_2}M_j$ 时,u 最多和 P_0 中 $i+1$ 个顶点相邻。设 $IP'_i=\{u\in P_i\cap I|d_{P_0}(u)=i+1\}$,$IP''_i=P_i\cap I-IP'_i$。因此我们可以把 $P_i\cap I(s_1\leqslant i\leqslant t_1)$ 划分为两个不相交的集合 IP'_i 和 IP''_i,即 $IP'_i=\{u\in P_i\cap I|d_{P_0}(u)\}$。设 $|IP''_i|=p'_i$,则 $|IP''_i|=|P_i\cap I|-p'_i$. 由于任意顶点 $u\in\bigcup_{i=s_1}^{t_1}IP'_i$ 都与 $\bigcup_{j=s_2}^{t_2}M_j$ 中至少一个顶点相邻,因此

$$\sum_{i=s_1}^{t_1}p'_i\leqslant s_2m_{s_2}+(s_2+1)m_{(s_2+1)}+\cdots+t_2m_{t_2} \tag{4}$$

由(3)和(4)得,

$$p_0\sum_{i=s_1}^{t_1}(i+1)p'_i+\sum_{i=s_1}^{t_1}i(|P_i\cap I|-p'_i)\leqslant\sum_{i=s_1}^{t_1}(i+1)p'_i+\sum_{i=s_1}^{t_1}i(p_i-p'_i)\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j \tag{5}$$

现在我们根据最小度 δ 的奇偶性分情况讨论。

情形1 当 δ 是奇数

此时,$s_1=(\delta-1)/2$。当 $i\geq(\delta-1)/2$ 时,$(\delta+1)i/(\delta-1)\geq i+1$ 成立,由不等式(1)(2)和(5)得,

$$\begin{aligned}n&\leqslant m+(\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j)+\sum_{i=1}^{t_1}p_i=m+\sum_{i=s_1}^{t_1}(i+1)p_i+\sum_{i=1}^{s_1-1}p_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j\leqslant m+\frac{\delta+1}{\delta-1}\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i\\&+\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j\leqslant m+\frac{\delta+1}{\delta-1}\sum_{i=1}^{t_1}ip_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j\leqslant m+\frac{\delta+1}{\delta-1}\Delta m-\frac{\delta+1}{\delta-1}\sum_{j=s_2}^{t_2}(\Delta-j)m_j\\&+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j\leqslant m+\frac{\delta+1}{\delta-1}\Delta m-\sum_{j=s_2}^{t_2}\frac{(\delta+1)\Delta-2j\delta}{\delta-1}m_j\end{aligned}$$

当 $\Delta\geq 3\delta$ 时,又 $t_2\leqslant\frac{\Delta+3}{2}$,则 $\frac{(\delta+1)\Delta-2j\delta}{\delta-1}\geq\frac{(\delta+1)\Delta-2t_2\delta}{\delta-1}\geq\frac{\Delta-3\delta}{\delta-1}\geq 0$。

此时 $n\leqslant m+\frac{\delta+1}{\delta-1}\Delta m$,即 $m\geq\frac{(\delta-1)n}{\Delta(\delta+1)+(\delta-1)}$。

因此, $\Gamma_s(G)=w(f)=n-2m\leqslant\frac{\Delta(\delta+1)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+1)+(\delta-1)}n$。

当 $\delta\leqslant\Delta<3\delta$ 时,结论已由[3]给出。

情形2 当 δ 是偶数

此时,$s_1=\frac{\delta}{2}$。当 $i\geq\frac{\delta}{2}$ 时,$\frac{\delta+2}{\delta}i\geq i+1$ 成立,故由(1) (2)和(5)可得

$$\begin{aligned}n&\leqslant m+(\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j)+\sum_{i=1}^{t_1}p_i=m+\sum_{i=s_1}^{t_1}(i+1)p_i+\sum_{i=1}^{s_1-1}p_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j\\&\leqslant m+\frac{\delta+2}{\delta}\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i+\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j\end{aligned}$$

$$\leqslant m+\frac{\delta+2}{\delta}\sum_{i=1}^{t_1}ip_i+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j\leqslant m+\frac{\delta+2}{\delta}\Delta m-\frac{\delta+2}{\delta}\sum_{j=s_2}^{t_2}(\Delta-j)m_j$$

$$+\sum_{j=s_2}^{t_2}jm_j\leqslant m+\frac{\delta+2}{\delta}\Delta m-\sum_{j=s_2}^{t_2}\frac{(\delta+2)\Delta-2(\delta+1)j}{\delta}m_j$$

当 $\Delta\geq 3(\delta+1)$ 时,又 $t_2\leqslant\frac{\Delta+3}{2}$,所以

$$\frac{(\delta+2)\Delta-2(\delta+1)j}{\delta}\geq\frac{(\delta+2)\Delta-2(\delta+1)t_2}{\delta}\geq\frac{\Delta-3(\delta+1)}{\delta}\geq 0$$

因此 $n\leqslant m+\frac{\delta+2}{\delta}\Delta m$,即 $m\geq\frac{\delta n}{\Delta(\delta+2)+\delta}$。

此时 $\Gamma_s(G)=w(f)=n-2m\leqslant\frac{\Delta(\delta+2)-\delta}{\Delta(\delta+2)+\delta}n$。

当 $\delta\leqslant\Delta<3(\delta+1)$ 时,结论已由[3]给出。

特别地,当图 G 的所有顶点的度数都是偶数时,对任意顶点 $u\in P_i\cap I(s_1\leqslant i\leqslant t_1)$,$u$ 最多和 P_0 中 i 个顶点相邻,这样由不等式(3)可得,$p_0\leqslant\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i$。

所以 $n=m+p_0+\sum_{i=1}^{t_1}p_i\leqslant m+\sum_{i=s_1}^{t_1}ip_i+\sum_{i=1}^{t_1}ip_i\leqslant m+\sum_{i=1}^{t_1}(i+1)p_i\leqslant m+\frac{\delta+2}{\delta}\sum_{i=1}^{t_1}ip_i$

$$\leqslant m+\frac{\delta+2}{\delta}\Delta m-\frac{\delta+2}{\delta}\sum_{j=s_2}^{t_2}(\Delta-j)m_j\leqslant m+\frac{\delta+2}{\delta}\Delta m,$$

即
$$m\geq\frac{\delta n}{\Delta(\delta+2)+\delta},\text{因此 }\Gamma_s(G)=w(f)=n-2m\leqslant\frac{\Delta(\delta+2)-\delta}{\Delta(\delta+2)+\delta}n。$$

4 比较结论

特别地,我们令 $\delta=\Delta=k$,则当 k 是偶数时,$\frac{\Delta(\delta+2)-\delta}{\Delta(\delta+2)+\delta}n=\frac{k+1}{k+3}n$;当 k 是奇数时 $\frac{\Delta(\delta+3)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+3)+(\delta-1)}n=\frac{n(k+1)^2}{k^2+4k-1}n$。这样我们就得到了定理 A。

令 $\delta=k$,$\Delta=k+1$,则当 k 是偶数时,$\frac{\Delta(\delta+4)-\delta}{\Delta(\delta+4)+\delta}n=\frac{n(k+2)^2}{(k^2+6k+4)}$;当 k 是奇数时,$\frac{\Delta(\delta+3)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+3)+(\delta-1)}n=\frac{n(k^2+3k+4)}{(k^2+5k+2)}$。这样我们就得到了定理 B。

因此,定理 A 和定理 B 是本文定理的特殊情况。

由于 $\frac{\Delta(\delta+1)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+1)+(\delta-1)}n\leqslant\frac{\Delta(\delta+3)-(\delta-1)}{\Delta(\delta+3)+(\delta-1)}n$,$\frac{\Delta(\delta+2)-\delta}{\Delta(\delta+2)+\delta}n\leqslant\frac{\Delta(\delta+4)-\delta}{\Delta(\delta+4)+\delta}n$,又当图 G 欧拉图时,它的所有顶点的度数都是偶数。显然,本文定理是对定理 C 的进一步改进。

参考文献:

[1] Favaron O. Signed domination in regular graphs[J]. Discrete Math, 1996, 158: 287 - 293.

[2] Wang C X, Mao J Z. Some more remarks on domination in cubic graphs[J]. Discrete Math, 2001, 237: 193 - 197.

[3] Tang Huajun, Chen Yaojun. Upper signed domination number[J]. Discrete Math, 2008, 308: 3 416 - 3 419.

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with application[M]. North Holland Amsterdam, 1976.

[5] Shan Erfang, Cheng T C E. Upper bounds on the upper signed total domination number of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157: 1 098 - 1 103.

(下转第 128 页)

参考文献:

[1] Lakoff Georg, Mark Johnson. Metaphors We Live by [M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.54 - 56.

[2] 卢 植, 孟智君. 英汉概念隐喻的认知语言学分析[J]. 华南师范大学学报(社会科学版), 2004, 49(3): 71 - 74.

[3] 任 宏. 英语谚语和汉语谚语中的隐喻[J]. 现代语文. 2006, 44(4): 68 - 69.

[4] 赵其娟, 赵其顺. 论英语隐喻的语义功能及文化差异[J]. 青海师范大学学报, 2006, 47(4): 104 ~ 106.

[5] 徐雪梅, 董召锋. 英汉颜色词的隐喻对比研究[J]. 金华职业技术学院学报, 2006, 6(8): 43 - 44.

A Comparison between Chinese and Western Culture on the Basis of Metaphor

HU Hua-fang

(School of Foreign Languages, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Metaphor is not only a kind of common rhetoric device, but also a basic way of recognizing the world. Comparison between Chinese and English metaphor contributes to revealing the difference of Chinese and western culture. To grasp the essence of Chinese-western culture, this article compares it from the viewpoint of metaphor.

Key words: metaphor; culture; difference

(责任编辑:王全金)

(上接第 103 页)

[6] Dunbar J E, Hedetniemi S T, Henning M A, *et al*. Singed domination in graphs[J]. Graph Theory, Combinatorics and Applications, Wiley, New York. 1995, (1): 311 - 322.

[7] Henning Michael A. Signed total domination in graphs[J]. Discrete Math, 2004, 278: 109 - 125.

Upper Bounds On the Upper Signed Domination Number of Graphs

LIU Hui-min

(School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: The upper signed domination number of a graph G, denoted by $\Gamma_s(G)$, is defined as $\Gamma_s(G) = \max\{w(f) \mid f$ is a minimal signed dominating function of G. In this paper, we establish a tight upper bound for $\Gamma_s(G)$ in terms of minimum degree and maximum degree. Our result is a generalization of those regular graphs and nearly regular graphs obtained in [1] and [2] respectively. Compared with the conclusion in [3], the result in this paper is more precise.

Key words: signed dominating function; upper bound; upper signed domination number

(责任编辑:吴泽九)